UNIVERSIDADE DE LISBOA
FACULDADE DE CIÊNCIAS – DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO

Concepções sobre a Matemática e a actividade matemática

Um estudo com matemáticos e professores do ensino básico e secundário

Henrique Manuel Guimarães

2003

UNIVERSIDADE DE LISBOA
FACULDADE DE CIÊNCIAS — DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO

Concepções sobre a Matemática e a actividade matemática

Um estudo com matemáticos
e professores do ensino básico e secundário

Henrique Manuel Guimarães

Dissertação apresentada na Universidade de Lisboa para a obtenção do grau de doutor em Educação, sob a orientação do Prof. Doutor João Pedro da Ponte

Julho de 2003

Resumo

Concepções sobre a Matemática e a actividade matemática: um estudo com matemáticos e com professores do ensino básico e secundário.

Esta investigação é sobre concepções de professores relativas à Matemática e a actividade matemática. O seu objectivo principal é identificar e descrever essas concepções, evidenciando elementos de homogeneidade e de heterogeneidade. Foi conduzida numa perspectiva qualitativa de investigação, centrada na pesquisa dos significados dos sujeitos envolvidos e orientada predominantemente numa lógica de descoberta. Foram realizados estudos de casos de dois matemáticos, professores do ensino superior, e de duas professoras de Matemática do ensino básico e secundário e as principais questões foram: 1) como descrevem os matemáticos e os professoras a sua visão da Matemática e a relação com esta ciência; 2) como caracterizam a actividade matemática; 3) em que aspectos se distinguem e em se assemelham as concepções dos matemáticos e das professoras sobre a Matemática e actividade matemática; 4) que elementos se destacam nos seus percursos escolares e profissionais; 5) em que aspectos se distinguem e em que se assemelham esses percursos no que se refere à relação com a Matemática e com a profissão.

Relativamente ao percurso escolar, destaca-se nos participantes deste estudo que: 1) a relação com a Matemática não é marcada por uma preferência exclusiva por esta disciplina na formação pré-universitária; 2) o gosto pela Matemática revelou-se cedo neste período e manteve-se relativamente estável; 3) no ensino superior a relação com a disciplina foi negativamente perturbada no caso das professoras, o que não aconteceu com os matemáticos. No que se refere à escolha profissional, o estudo realizado dá indicações que gosto pela Matemática e o sucesso na disciplina intervêm nessa escolha que, todavia, não é exclusivamente determinada por preferências disciplinares ou profissionais prévias, intervindo também factores diversos, alguns extrínsecos à Matemática e à profissão de professor. Em relação ao modo como se situam na profissão há um contraste nítido entre as professoras e os matemáticos. As primeiras não se identificam como matemáticas e não consideram a Matemática o centro da sua profissão, mas sim o seu ensino. Não evidenciam um sentimento de realização profissional que é patente nos matemáticos, associado à componente de investigação da profissão e não à componente de ensino. Os espaços de liberdade e de iniciativa, a possibilidade do exercício da criatividade e o reconhecimento entre pares e na sociedade são aparentemente factores geradores dessa realização profissional.

Foram identificados atributos de dois tipos, relevantes para a caracterização das concepções sobre a Matemática: atributos de natureza estética e de natureza lógica ou intelectiva. São exemplos dos primeiros a "harmonia", invocada pelos matemáticos e por uma das professoras, e a "elegância", usada por um dos matemáticos. No entanto, os atributos que apelam sobretudo à sensibilidade estética e associados ao reconhecimento de uma beleza matemática não se evidenciaram de forma

significativa na visão que os diferentes participantes têm desta ciência. Em contrapartida, os que apelam à racionalidade ou à intelecção, como o rigor, a exactidão e o carácter dedutivo foram os que mais se destacaram. São estes atributos que as professoras consideraram distintivos da Matemática, no confronto com as outras ciências, e o que lhe confere a clareza e confiança que lhe reconheceram. Esta concepção está igualmente presente nos matemáticos, menos extremada e enraizada num deles para quem a Matemática tem também fragilidades e zonas em que não existe uma completa segurança e solidez do conhecimento. Este matemático reconhece analogias entre a Matemática e as outras ciências, nomeadamente, ao valorizar o raciocínio plausível e uma componente de tipo experimental na produção do conhecimento matemático.

Sobre a actividade matemática foram identificadas algumas modalidades — a demonstração, o cálculo e a matematização — e aspectos não especificamente matemáticos — a compreensão e a autonomia — que se revelaram relevantes na forma como os participantes a caracterizaram. A demonstração é tendencialmente associada à dedução e surge como a modalidade por excelência da actividade matemática no quadro da Matemática ciência, sendo o que mais a distingue dos outros domínios científicos. Numa das professoras estas ideias não tiveram muita expressão e foram patentes diferenças nos matemáticos, por exemplo, no que se refere à aceitação das demonstrações computacionais. No quadro da Matemática escolar a demonstração não foi objecto de menções significativas. O cálculo, contrariamente, aparece com dominância na Matemática escolar mas é aparentemente subalternizado no quadro da Matemática ciência. Existem todavia diferenças, nomeadamente entre as professoras, uma das quais atribui ao cálculo um carácter meramente instrumental enquanto a outra lhe reconhece um carácter de pré-requisito para a aprendizagem conceptual, posição que também se manifestou num dos matemáticos. A matematização foi outra das modalidades a que foi dado relevo na Matemática ciência, como as suas aplicações (apesar de, num dos matemáticos, não constituírem a motivação principal no seu trabalho de investigação) mas com pouca expressão na Matemática escolar, em particular na prática de ensino das professoras.

Os conceitos, as regras ou as técnicas matemáticas aparecem como ingredientes naturais de uma actividade matemática, embora sem o mesmo estatuto matemático: aos conceitos é-lhes reconhecida superioridade quando se trata de apreciar o carácter matemático de uma actividade. Relativamente a qualquer deles, a compreensão é considerada indispensável para que a actividade tenha um cunho matemático bem como a autonomia do aluno na sua realização. Compreensão e memorização na aprendizagem, e autonomia e dependência do aluno, constituem duas dicotomias no espaço das quais se exprimem algumas das concepções dos matemáticos e das professoras sobre a actividade matemática e que deixam entrever os seus aspectos dilemáticos, nomeadamente ao nível da prática lectiva.

Palavras-chave: concepções, conhecimento, professores, matemáticos, Matemática, actividade matemática, ensino da Matemática.

Abstract

Conceptions of mathematics and mathematical activity: a study with mathematicians and secondary school mathematics teachers

This study is about teachers' conceptions about mathematics and mathematical activity. Its main goal is to identify and describe those conceptions highlighting their homogeneous and heterogeneous aspects. With a special focus on meaning, it was conducted within a qualitative research perspective, mainly guided by logic of discovery. Four case studies were undertaken, of two university teachers mathematicians and two secondary school mathematics teachers. The main questions of the study were: 1) How do mathematicians and mathematics teachers describe their vision of mathematics and their relationship with this science?; 2) How do they characterize the mathematical activity?; 3) How similar and different are their conceptions about mathematics and the mathematical activity?; 4) What appears to be relevant in their school education and in their professional journeys?; 5) How similar and different are their academic and professional journeys concerning their relationship with mathematics and the profession?

Results about their school education show that: 1) Their relationship with mathematics is not characterized by an exclusive preference regarding mathematics during pre-university education; 2) Their interest for mathematics developed early in school education and remained relatively stable; 3) University mathematics education provoked some negative disruptions on the relationship of the mathematics teachers with mathematics, but this did not happen with the mathematicians. Interest and success in mathematics play a role in the professional choice but early subject and professional preferences do not exclusively determine this choice. Other factors are present, some of them external to mathematics and teaching. Between the teachers and the mathematicians a clear contrast was found in their present professional feelings: the teachers did not regard themselves as mathematicians and they viewed mathematics teaching, not mathematics, as the core and main purpose of their profession. They did not appear to be professionally fulfilled. The mathematicians, on the contrary, shown a fulfillness that appeared to be related to the research component, and not to the teaching component, of their professional activity. Spaces of freedom and initiative, the possibility of experiencing creativity and the recognition of their peers and society appeared to be key factors generating professional fulfillness.

Two different kinds of attributes were found to be relevant to describe mathematical conceptions: aesthetic attributes and logical or intellective attributes. "Harmony", used by the mathematicians and by one of the teachers, and "elegance", used by the one mathematician, are examples of the first kind of attributes. These attributes, related with aesthetic sentiment and the recognition of mathematical beauty were not found as impressive ones, shaping the vision of mathematics of teachers and mathematicians of this study. On the contrary, logical attributes, as rigour, exactness and deduction, were found to be clearly and firmly embedded in that vision. These were the kind of attributes held by the teachers to distinguish mathematics from the others sciences, and they were seen as the basis of the unambiguous nature and reliability of mathematics. This conception was also held by the mathematicians but in a less extreme way, and not so deeply, in one of them, for whom mathematics itself has its fragilities and not all mathematical knowledge is completely secure. This mathematician pointed out analogies between mathematics and other sciences, namely valuing plausible reasoning and experimental-like working in the process of the production of mathematics knowledge.

Some modes of mathematical activity — proving, computing, mathematizing — and some non-mathematical specific aspects — understanding and autonomy — were found to be relevant in the way participants characterized mathematical activity. Proving tends to be identified with deduction and appears to be in their view the more distinctive mode of mathematical activity in mathematics as a science. Nevertheless, for one teacher, these ideas were not very expressive and differences between the two mathematicians were found, namely regarding the mathematical legitimacy of computational proofs. In the context of school mathematics, proving was almost absent and appeared to be much less relevant. Differently, computing is dominant in this context and seems to be undervalued in context of mathematical science. Differences, however, were found, namely between the two teachers. For one of them computing is only a tool but to the other it is a fundamental pre-requisite to further conceptual understanding (this view is also somewhat present in one of the mathematicians). Mathematizing is the other mode of mathematical activity that was valued in the context of mathematical science, as well as its applications (even if they were not viewed as the purpose or the source of motivation in mathematical research for one of the mathematicians) but it has not appeared to be relevant in the context of school mathematics.

Mathematical concepts, rules and procedures appeared to be natural ingredients of mathematical activity. However they were viewed as having different mathematical status: concepts were seen to be superior if we are to appreciate how mathematical is the activity. All considered, understanding as well as student autonomy, were taken as fundamental in order to qualify an activity as a mathematical one. Understanding and memorization in learning, and student autonomy or dependence appear to be dichotomies within which some mathematicians and mathematics teacher's conceptions about mathematical activity are expressed and they let us see its dilemmatic aspects, namely in mathematics teaching practice.

Keywords: conceptions, knowledge, teachers, mathematicians, mathematics, mathematical activity, mathematics teaching.

ao meu pai

ao André, ao Daniel
meus filhos

Agradecimentos

Às professoras e aos matemáticos que acederam, com simpatia e disponibilidade, a partilhar comigo as suas ideias sobre a ciência com que trabalham e sobre o seu ensino, permitindo-me assim levar a cabo este estudo.

Ao meu orientador, Professor João Pedro da Ponte, que aceitou prontamente acompanhar este meu demorado trabalho, de quem recebi sempre, sem demoras, comentários, críticas e sugestões que me ajudaram no seu desenvolvimento e a que chegasse ao fim. E que esteve presente com amizade.

Ao meu irmão Carlos, incansável irmão de quem recebi preciosa ajuda, todo o cuidado e utilíssimas sugestões na revisão do texto. E muita e inestimável companhia. E gestos solidários que guardo, guardarei sempre.

Como da minha irmã Fátima, sempre ela que me abria a porta e recebia, deixando-se comigo, muitas vezes, em fala pela noite.

À minha mãe, que ainda tenho.

Ao José Manuel Matos, estimado amigo de conversas centradas, cruzadas, desviadas nestes anos turbulentos.

Aos colegas e amigos que me fizeram chegar muitas vezes sinal da sua atenção, do Grupo *Didáctica e Formação*, em especial, lugar onde encontrei o prazer do encontro e o estímulo da discussão.

Ao Departamento de Educação a que pertenço, pela oportunidade e apoio concedidos para realizar este trabalho.

a história será apenas
um indício para a história
um sinal que nos escapa

José Tolentino Mendonça

Índice

I — Apresentação do estudo

Introdução

A Escola é lugar de ensino por excelência e o ofício primeiro do professor é ensinar. Ensinar, pela natureza própria do acto que a transitividade do verbo traduz, obriga a um conteúdo, a algo que é ensinado ou para ensinar. É, além disso, um acto endereçado, com uma direcção, um acto que se dirige sempre a alguma pessoa. O professor, 'o que faz profissão de', 'que se entrega ao'[1] ensino, deixa, ao ensinar, uma 'marca'[2], a marca daquilo que ensina, naquele a quem ensina. O acto de ensinar, justamente porque se ensina sempre alguma coisa a alguém, é, assim, um acto radicalmente intencional. Um acto que, portanto, pressupõe no professor razões e motivos, propósitos e objectivos, eventualmente nem sempre claramente definidos e explícitos, que o orientam nos juízos que faz e nas opções e decisões que toma na sua prática de ensino. Estes juízos, opções e decisões do professor decorrem das interpretações que realiza, do significado que atribui a questões, problemas e situações com que se depara, que, nessa medida, tem uma influência importante na sua actuação.

O ensino é, fundamentalmente, um processo de comunicação pelo qual o conhecimento disciplinarmente instituído em diversas áreas — científicas,

---

[1] Significado da etimologia latina *professorē* (Machado, 1995, p. 437).

[2] O étimo latino *insignāre* significa pôr uma marca, assinalar (Machado, 1995, p. 408).

humanísticas, artísticas — é transmitido de geração para geração ao longo das épocas. É, assim, "uma fala entre gerações", fala por essência "assimétrica" (Olga Pombo, 2002, p. 9) — com assimetria dupla, entre adulto e criança ou jovem, e entre aquele que sabe e aquele que ainda não sabe[1] — e que é condição para que o ensino e, portanto, a aprendizagem, possam ter lugar. A aprendizagem, em contexto escolar, é a razão de ser do ensino; não há, a meu ver, ensino se não existir aprendizagem[2], entendido o ensino como processo de interacção entre o professor e o(s) aluno(s), pelo qual o professor promove e dirige a aquisição e o desenvolvimento do referido conhecimento no(s) aluno(s). Este processo é condicionado por inúmeros factores, uns mais próximos do professor e da escola — por exemplo, os que decorrem das opções curriculares vigentes ou da organização e dinâmicas escolares — outros mais distantes — por exemplo, os que têm origem na política educativa ou em condicionantes políticas e sociais mais gerais. Todavia, a influência deste tipo de factores, como B. Cristiansen e G. Walter (1986) chamam a atenção, só em parte pode ser "controlada" e, no microcosmos de uma turma, o ensino praticado "é também fortemente dependente de aspectos difíceis de captar tais como as concepções dos professores" (p. 247) e também, como esses autores ainda acrescentam, das concepções dos alunos relativas à Matemática, ao ensino e aprendizagem.

Esta investigação é um estudo sobre as concepções de professores de Matemática desenvolvido com o pressuposto de que tais concepções, enquanto elementos do conhecimento profissional, desempenham um papel fundamental na forma como os professores interpretam as situações educativas e orientam e estruturam a sua actuação no âmbito do ensino que empreendem. O propósito geral do estudo é contribuir para a compreensão dos processos mentais e do conhecimento que o professor possui e utiliza na sua prática de ensino, e desse modo contribuir também para a compreensão das suas opções didácticas e

[1] "Pense-se o que se pensar, o professor é aquele que sabe mais e que é mais competente", diz Hannah Arendt (2000, p. 33), criticando uma pedagogia entendida como ciência do ensino em geral, que anula ou desvaloriza a formação do professor no domínio específico da matéria que vai ensinar, e que desse modo retira ao professor "a fonte mais legítima da sua autoridade enquanto professor" (p. 33).

[2] Sabemos que pode existir aprendizagem sem ensino pois, como é da condição humana, desde o dia que chegamos ao mundo, podemos sempre aprender, nos mais diversos contextos e circunstâncias. Mas, que sentido ou significado atribuir a ensino se a este não corresponder uma aprendizagem?

pedagógicas e das decisões que toma nessa prática. Mais especificamente, o estudo que realizei centra-se nas concepções sobre a Matemática e a actividade matemática de dois tipos de participantes — matemáticos professores universitários e professores de Matemática do ensino básico e secundário — tendo também incidido sobre os seus percursos de vida escolar e profissional, com a intenção de proporcionar elementos de contextualização que permitissem um entendimento das suas concepções à luz desses percursos.

A inclusão dos dois tipos de participantes referidos visa introduzir no estudo sujeitos que se distinguissem significativamente ao nível da experiência profissional e, muito em particular, ao nível da experiência com a Matemática: os matemáticos pelo trabalho que profissionalmente desenvolvem, mais próximos da Matemática ciência, e os professores do ensino básico e secundário, mais próximos da Matemática escolar. Esta diferenciação traz, acrescentado ao estudo dos professores do ensino básico e secundário, o estudo confrontado das suas concepções com as concepções dos matemáticos, esperando, com este confronto, uma melhor compreensão dessas concepções. Os matemáticos são, em muitos casos, professores de futuros professores e não há ainda, em Portugal, estudos empíricos sobre as suas concepções relativas à ciência com que trabalham, certamente com influência na determinação do entendimento e visão desses futuros professores em relação à Matemática e à actividade matemática.

Assim, o objectivo principal desta investigação é identificar e descrever, nos seus traços mais relevantes, as concepções dos diferentes participantes sobre a Matemática e a actividade matemática, procurando evidenciar elementos de homogeneidade — aspectos comuns, semelhanças, convergências — e de heterogeneidade — singularidades, contrastes, divergências — entre os matemáticos, entre os professores de Matemática e entre uns e outros no seu conjunto. No quadro deste objectivo e com o propósito enunciado, as questões que estabeleci para orientar e estruturar a investigação foram as seguintes:

— como descrevem os matemáticos e os professores a sua visão da Matemática e a relação que têm com esta ciência;

— como caracterizam a actividade matemática;

— em que aspectos se distinguem e em que aspectos se assemelham as concepções dos matemáticos e as concepções dos professores sobre a Matemática e actividade matemática;

— que elementos se destacam nos percursos de vida escolar e profissional dos matemáticos e dos professores;

— em que aspectos se distinguem e em que aspectos se assemelham esses percursos, em particular no que diz respeito à relação com a Matemática e com a profissão.

A razão e a importância do estudo das concepções

O estudo das concepções dos professores insere-se, no que se refere à investigação educacional, numa área mais ampla, habitualmente reconhecida como o estudo do pensamento ou do conhecimento do professor. No que diz respeito ao ensino da Matemática, trata-se de uma área de investigação em desenvolvimento sensivelmente desde o início dos anos oitenta, e que tem vindo a merecer uma atenção crescente. Se tomarmos como referência a terceira edição do *Handbook of Research in Education* publicado em 1986[1], verificamos que esta obra contém vários trabalhos sobre estudos de investigação realizados na área mencionada, enquanto que na edição anterior, publicada em 1973, encontramos poucas referências a este respeito (Clark e Peterson, 1986; Feiman-Nemser e Floden, 1986). Alguns anos mais tarde, uma obra do mesmo tipo mas dedicada ao ensino da Matemática — *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*[2] — evidencia a grande expansão dos trabalhos de investigação na mesma área, estudando professores de Matemática (Fennema e Franke, 1992; Thompson, 1992).

Existe, na verdade, um consenso crescente sobre a importância em ter acesso à 'vida mental' dos professores, em conhecer e compreender os vários aspectos do seu pensamento e conhecimento, bem como as relações desses aspectos com a sua actuação ou comportamento (Clark e Peterson, 1986; Fennema e Franke, 1992; Pajares, 1992; Thompson, 1992). Por detrás deste interesse, está a convicção de que aquilo que o professor pensa influencia de

[1] M. C. Wittrock (Ed.) (1986).
[2] D. A. Grouws (Ed.) (1992).

maneira significativa aquilo que o professor faz. Já em 1974, como relatam Clark e Peterson (1986), na sequência de uma conferência promovida pelo *National Institute of Education* que visava o estabelecimento de uma agenda para a investigação no ensino, dizia-se mesmo, num dos relatórios apresentados: "é óbvio que aquilo que os professores fazem é dirigido de maneira não desprezável por aquilo que eles pensam" (p. 256). Os próprios Clark e Peterson, no estudo referido, apresentam como pressuposto da investigação sobre o pensamento do professor, a ideia de que o seu comportamento pode mesmo ser "determinado" pelos processos de pensamento que desenvolveu[1]. Fennema e Franke (1992), por sua vez, são de opinião de que é indiscutível que o conhecimento do professor "é uma das influências mais importantes naquilo que é feito na sala de aula e, em última análise, naquilo que os alunos aprendem" (p. 147), ideia que vem exactamente no mesmo sentido da de Frank Pajares (1992), referindo-se, neste caso, às crenças (*beliefs*) dos professores:

> "Poucos discutirão que as crenças que os professores possuem influenciam as suas percepções e os juízos que fazem, os quais, por sua vez, afectam o seu comportamento na aula, ou que é essencial compreender as estruturas das crenças dos professores, ou dos futuros professores, para melhorar a sua preparação profissional e as suas práticas de ensino." (p. 307)

Referindo-se ao ensino da Matemática, Thompson (1992), com base num estudo de Ernest (1988), afirma que a investigação realizada sobre as crenças dos professores indica que a abordagem que eles fazem a esse ensino "depende fundamentalmente dos seus sistemas de crenças, em particular das suas concepções sobre a natureza e significado da Matemática e dos seus modelos mentais relativos ao seu ensino e aprendizagem" (p. 131), acrescentando que as potencialidades desta investigação têm vindo a ser cada vez mais reconhecidas.

Segundo alguns autores, no processo de percepção e de interpretação das situações de ensino, as concepções dos professores, e em particular as suas concepções sobre a disciplina que ensinam, bem como sobre o ensino e a aprendizagem, desempenham um duplo papel face aos factores que têm origem nessas situações. Alba Thompson (1982), no estudo que realizou no início da

---

[1] "O comportamento do professor é substancialmente influenciado e mesmo *determinado* pelo seu processo de pensamento" (itálico meu) (Clark e Peterson, 1986, p. 255).

década de oitenta, considera que esse papel é simultaneamente de "interacção" (*interacting*) e de "mediação" (*mediating*). No primeiro caso, as concepções interagem com os factores situacionais, actuando de forma a reforçar ou a atenuar os seus efeitos na acção do professor, conforme sejam mais ou menos compatíveis com esses factores. Ou seja, neste seu papel, as concepções que o professor possui podem torná-lo mais ou menos receptivo, seja a indicações curriculares de carácter geral, seja a propostas programáticas ao nível dos tópicos matemáticos ou das metodologias de trabalho, seja ainda ao nível das actividades ou da actuação dos alunos na aula, e deste modo, influenciar a sua actuação. No segundo caso, as concepções surgem a mediar a relação entre o professor e a situação, como que se interpondo entre um e outra, interferindo assim no modo como o professor a percebe e a interpreta. Neste seu papel de mediação, diz-nos Thompson, "as concepções actuam como um filtro através do qual a informação é processada e interpretada" (p. 8), podendo constituir uma espécie de "configuração anticipadora" (*anticipatory schemata*)[1] que gera expectativas no professor face às situações com que se vai confrontando:

> "A percepção que o professor tem da situação [que enfrenta], elaborada através do filtro das suas concepções, dará origem a expectativas consideravelmente bem estabelecidas, embora inconscientes, relativamente a situações que venham na sua sequência." (p. 9)

Na nossa relação com a realidade, as concepções podem assim ser vistas a desempenhar um papel que é, simultaneamente, condição e limite do nosso conhecimento dessa realidade. Por um lado, permitem-nos interpretar, *dar sentido* às situações com que nos confrontamos; sem elas, poderíamos dizer, essa interpretação não é possível. Por outro lado, o acesso que temos à realidade não é um acesso directo; é através dos nossos sistemas conceptuais que a realidade nos chega e, exactamente por isso, chega-nos 'filtrada' pelas nossas concepções que assim limitam o nosso conhecimento, introduzindo uma distorção que impregna a percepção e a compreensão que temos do que se nos apresenta ao nosso espírito[2].

---

[1] Expressão que Thompson cita de um outro autor, U. Neisser (1976).

[2] Vem aqui a propósito a analogia que D. Jones (1988) estabelece entre o princípio de incerteza de Heinsenberg na Física e a afirmação que cita de H. Bauersfeld, referindo-se à investigação

Assim, para compreender a actuação do professor, os juízos que faz e as opções e decisões que toma, investigar as suas concepções sobre a Matemática e sobre o ensino e aprendizagem dessa disciplina, constituirá certamente um passo importante.

O estudo das concepções dos professores em Portugal

A investigação educacional em Portugal referente ao ensino da Matemática é relativamente recente e os primeiros trabalhos neste âmbito, levados a cabo por investigadores portugueses e incidindo sobre a realidade educativa do nosso país, realizaram-se no início da década de oitenta[1]. Logo nestes trabalhos pioneiros se manifestou o interesse pelo professor de Matemática, de uma forma indirecta em estudos que incidiram sobre programas ou modelos para a sua formação, mas também de uma forma directa, em trabalhos que investigaram aspectos do seu conhecimento matemático[2], os seus interesses e necessidades de formação[3] ou as suas atitudes e concepções relativas a questões específicas de incidência curricular[4]. Com o dobrar da metade dos anos oitenta e o início dos mestrados no Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, a preocupação com o 'lado do professor', de que estes trabalhos são uma primeira manifestação, tomou corpo numa linha de investigação que se diversificou e aprofundou ao longo das duas últimas décadas. Neste período, alargou-se aos vários ciclos da escolaridade não superior, tendo-se constituído como uma das áreas onde a investigação tem sido mais prolífica (Matos, 1995; Ponte, 1994b; Ponte, Matos e Abrantes, 1998). Cabe aqui dizer que não existem estudos portugueses sobre as concepções dos matemáticos ou professores de Matemática do ensino superior e que eles são também pouco frequentes em outros países.

---

em educação: "a orientação teórica que possuímos determina, no que é pensado, àquilo que é 'variável importante' e o que é 'ruído'" (p. 3).

[1] Refiro-me aos estudos desenvolvidos no quadro dos chamados mestrados de Boston iniciados em 1983 e que deram origem às primeiras teses de autores portugueses na área do ensino da Matemática, e ao trabalho de Paulo Abrantes apresentado em 1986 para prestação das provas de aptidão pedagógica e competência científica.

[2] Cristolinda Costa (1984) e José Manuel Matos (1994).

[3] Domingos Fernandes (1984), Fátima Costa (1984) e Maria Cecília Monteiro (1984).

[4] Rui Soares (1984) e Paulo Abrantes (1986).

Na linha de investigação referida, o estudo das concepções ocupa um lugar de destaque, num percurso que se iniciou com o trabalho que realizei em 1988 (Guimarães, 1988) e que prosseguiu na década de noventa com inúmeras investigações que fizeram das concepções dos professores o seu objecto de estudo principal[1]. Neste percurso há trabalhos de incidência geral, no que à Matemática e ao seu ensino diz respeito, e outros, mais numerosos, que delimitam a sua incidência a aspectos particulares, como é o caso dos estudos que se centraram sobre a resolução de problemas (Boavida, 1993; Fonseca, 1995; Oliveira, 1993; Vale, 1993), a utilização de tecnologia (Azevedo, 1993) ou de materiais didácticos (Ribeiro, 1995), a comunicação na sala de aula (Meneses, 1995) e a avaliação da aprendizagem (Martins, 1996). Muitos destes estudos, não obstante, reportam também concepções gerais dos professores sobre a Matemática como acontece nas investigações de Guimarães (1988), Serrazina (1993) e Canavarro (1993), tendo esta última incidido ainda sobre as concepções relativas à utilização do computador no ensino desta disciplina. No seu conjunto, estes trabalhos marcam uma diferença significativa relativamente às primeiras investigações sobre o professor referidas no princípio deste ponto, uma vez que adoptam uma perspectiva metodológica qualitativa e, além disso, estudam a sua prática de ensino[2], o que até então não acontecera.

Concepções sobre a Matemática. De um modo geral, os trabalhos que analisei são mais ricos e detalhados no que diz respeito às concepções sobre o ensino da Matemática do que às concepções sobre esta ciência. Em relação a estas últimas, os resultados apresentados, não sendo uniformes, fazem ressaltar alguns traços comuns nos professores estudados, uns de carácter geral, outros de natureza específica. Em particular, sobressai uma tendência dos professores para encararem a Matemática sobretudo como uma disciplina escolar[3], eventualmente

[1] A partir de meados dos anos noventa, sensivelmente, a investigação em Portugal sobre o professor, seguindo tendências internacionais (Oliveira e Ponte, 1996), deslocou a sua incidência principal do estudo das concepções dos professores para o estudo do seu conhecimento e do seu desenvolvimento profissionais (Guimarães, 1999; Guimarães, 1996; Ponte, 1993; Ponte, 1994a; Serrazina, 1999).

[2] Apenas um dos estudos aqui citados não o faz (Boavida, 1993).

[3] A investigação com professores do 1º ciclo é ainda reduzida mas o trabalho de Lurdes Serrazina (1999) sugere que esta situação também está presente neste nível de escolaridade. "Quando o [conhecimento matemático] é referido" pelas professoras, diz a autora, "é-o no sentido do conhecimento necessário para ensinar Matemática" (p. 139).

decorrente de um certo alheamento relativamente à Matemática como ciência que também é perceptível (Boavida, 1993; Canavarro, 1993; Guimarães, 1988; Loureiro, 1992; Vale, 1993). É, na verdade, manifestada uma dificuldade, da parte dos professores estudados, em se pronunciarem sobre a Matemática para lá do campo estritamente escolar, tendo vários dos professores referido ser a primeira vez que tal lhes era solicitado e que reflectiam sobre isso. Essa dificuldade, em alguns casos, é relacionada com o facto de um conhecimento e reflexão sobre esta ciência, contemplando aspectos históricos e epistemológicos, os seus métodos e processos, a sua relevância e aplicabilidade, não aparecerem como parte das suas preocupações e interesses profissionais[1]. Cabe aqui dizer que, numa revisão da investigação sobre o professor (Ponte, Matos e Abrantes, 1998) é sugerido que a participação dos professores em actividades e projectos no âmbito associativo, ou orientados para a inovação curricular, pode minimizar ou eliminar o tipo de dificuldade referido, por tal participação favorecer a reflexão nos professores envolvidos e um enriquecimento das suas concepções.

Ainda em relação ao binómio Matemática ciência—Matemática escolar, há estudos que encontram nos professores uma distinção mais ou menos vincada entre uma e outra expressa umas vezes pelo reconhecimento de que a primeira é mais "complexa" ou "difícil" do que a segunda, outras vezes pela consideração de que ela é mais "teórica" ou de um grau de "abstracção" e "formalização" superior (Azevedo, 1993; Canavarro, 1993). Para além deste tipo de diferenças, por assim dizer, 'naturais' entre as duas Matemáticas, um dos estudos reporta o caso de uma professora para a qual a distinção entre elas "reside na componente criativa que é fundamental na Ciência e inexistente na Escola", a par de uma outra para quem a Matemática "tem a mesma natureza nos dois contextos", residindo a distinção nos diferentes graus de abstracção e formalização referidos (Canavarro, 1993, p. 313).

Um outro traço que se evidencia entre os professores estudados é uma visão da Matemática como um corpo de conhecimentos caracterizado por atributos de natureza lógica, como um domínio científico onde a ambiguidade não tem lugar e é possível estabelecer com certeza a verdade ou a consistência dos seus conhecimentos e a correcção dos resultados aí perseguidos. Na minha

[1] Este problema foi também identificado entre os matemáticos num trabalho de que a seguir se dá conta (Mura, 1993).

primeira investigação sobre concepções, os professores que estudei, como afirmo nas conclusões, tendem a ver a Matemática como uma ciência "exacta, rigorosa, de carácter eminentemente dedutivo" (Guimarães, 1988, p. 245), visão que outros trabalhos também encontram. É o caso do estudo de A. Azevedo (1993), que destaca a "objectividade" e o "rigor" com que ela é encarada pelos seus professores (p. 217), rigor igualmente mencionado como "uma das características mais evidenciadas" nos participantes de um outro estudo a par, nuns casos, com a sua "consistência", noutros, com a natureza "absoluta e infalível" que lhe é reconhecida (Ribeiro, 1995, p. 142). Podemos encontrar uma visão deste tipo ainda em outras investigações que dão conta de uma tendência dominante, nos professores que estudaram, em sustentar "concepções" ou "filosofias pessoais" categorizadas como de tipo absolutista (Martins, 1995 e Boavida, 1993). Por exemplo, numa dessas investigações, os professores assim categorizados, consideram a Matemática como uma ciência rigorosa e dedutiva que "não é susceptível de erros" (Boavida, 1993, p. 209) ou que "na Matemática o que é, é mesmo e pode-se demonstrar" (p. 218). Esta categorização é feita com base em quadros teóricos sobre concepções relativas à Matemática (ver Thompson, 1992) em que "absolutismo" nomeia uma perspectiva segundo a qual a Matemática tem "fundamentos universais e seguros e, como tal, é paradigma do conhecimento certo e absoluto" (p. 132).

Estas últimas investigações, todavia, dão igualmente conta de alguma diversidade entre os professores. Na verdade, a perspectiva absolutista é apresentada como mais extremada nuns casos do que noutros e, para além disso, reportam também professores com uma concepção da Matemática que, seguindo os mesmos quadros teóricos, é apresentada como "falibilista". Segundo o falibilismo, perspectiva frequentemente associada às ideias de Imre Lakatos (1990, 1993), não existem fundamentos indubitáveis para Matemática e, enquanto criação humana, ela está aberta à revisibilidade do seu conhecimento que progride num processo de conjecturas, provas e refutações. Numa das investigações referidas, há professoras que admitem esta revisibilidade, uma delas, por exemplo, declara que lhe é difícil aceitar que "um resultado uma vez provado fique provado para sempre" (Boavida, 1993, p. 228) e outra que diz que a Matemática actual nos serve porque com ela conseguimos lidar com a nossa realidade mas acrescenta: "nada me leva a acreditar que este processo não seja todo posto em causa daqui por uns tempos" (p. 240).

Em vários dos trabalhos que analisei, é destacado ainda um outro atributo que a generalidade dos professores aí estudados reconhecem na Matemática: a sua grande aplicabilidade. Na minha investigação anterior sobre concepções, a ideia da Matemática como ciência eminentemente aplicável foi, na verdade, uma ideia "persistente" nos professores desse estudo e, como então sublinhei, todos eles "manifestaram uma concepção da Matemática como ingrediente indispensável na procura de respostas a necessidades diversas da actividade humana", nomeadamente na resolução de problemas e no desenvolvimento das outras ciências (Guimarães, 1988, pp. 247-248). Neste sentido, apontam também trabalhos como o de C. Loureiro (1992), que apresenta como dominante nos professores que estudou a ideia da Matemática como uma "ciência útil com largas aplicações à vida quotidiana" (p. 16), e o de A. Azevedo (1993), em cujas conclusões é dito que os participantes no estudo encaram a Matemática como "base de todas as ciências" e como "preparação para a vida activa" (p. 217). A. P. Canavarro (1993), por sua vez, afirma que "a relação da Matemática com a realidade e com as outras ciências" (p. 312) é reconhecida por todos os professores da sua investigação, uns apresentando-a mesmo como uma explicação para o progresso do conhecimento matemático. Podemos ver, neste caso, uma perspectiva que acrescenta à concepção instrumental da Matemática, a ideia de que a realidade e as ciências constituem uma fonte de desenvolvimento da Matemática e que aponta, portanto, para o reconhecimento de uma fecundidade recíproca na relação entre elas.

Estas concepções sobre a aplicabilidade da Matemática, importa dizer, nem sempre têm consequência na prática de ensino, como pude verificar no caso dos professores do meu estudo de 1988[1] onde, a este respeito, concluo: "a Matemática é considerada aplicável, mas dessa sua qualidade não são retiradas implicações para a sua aprendizagem" (p. 248). Situações como esta surgem, por vezes, em estudos que analisei como manifestação ou evidência de contradição entre as concepções do professor e a prática que desenvolve. Esses estudos procuram investgar a relação entre as concepções e as práticas retirando as concepções da fala do professor, ou seja, do seu discurso em entrevistas ou conversas informais, enquanto que consideram a prática como o que se revela

[1] Situação também identificada, como então referi, em outros estudos como, por exemplo, em Brown, Brown, Cooney e Smith (1982), Owens (1987) e Thompson, (1982).

na observação de aulas ou de outros aspectos da actuação do professor. Esta forma de entender as concepções e de proceder ao seu estudo pode colocar limitações e dificuldades à sua compreensão, bem como à compreensão das próprias práticas, uma vez que eventuais contradições entre o que o professor diz e o que o professor faz não significam, necessariamente, contradições entre as suas concepções e a sua prática. Tal como as crenças, as concepções não têm todas a mesma importância para a pessoa (Rokeach, 1976) e há autores que sustentam a possibilidade de coexistirem concepções contraditórias numa mesma pessoa. Esta situação é explicada pela possibilidade das crenças poderem ocorrer em agrupamentos mais ou menos isolados o que impede o confronto entre elas e permite a existência de crenças conflituantes (Green, 1971).

Concepções sobre a actividade matemática. Alguns dos estudos que analisei identificam nos professores uma distinção: uns tendem a encarar a Matemática fundamentalmente como um "corpo de conhecimentos", outros como uma "actividade" (Canavarro, 1993; Martins, 1996). Esta distinção não é muito especificada mas um desses estudos apresenta-a como traduzindo as "duas concepções principais" dos seus participantes e dá-nos conta que, para uma das professoras, as acções mais importantes nessa actividade são "a criação e a exploração de relações entre conceitos" onde intervêm saberes matemáticos (Canavarro, 1993, p. 312). Da professora em questão, é ainda dito que ela se reconhece como uma matemática pois considera as actividades que profissionalmente desenvolve da mesma natureza das que os matemáticos realizam. Esta identificação não foi no entanto encontrada nos outros participantes do mesmo trabalho, sendo referido que, para uma outra das professoras, contrariamente, a actividade matemática escolar "é muito diferente da genuína actividade matemática dos cientistas", diferença que, no entender dessa professora, reside no facto de ela ser essencialmente "transmissiva e não criativa" (p. 178). Este trabalho, reporta ainda o reconhecimento, por parte dos professores estudados, da componente criativa na actividade matemática científica como um elemento que caracteriza essa actividade, dando-nos conta igualmente que, para esses professores, o matemático, no processo de "criação do novo conhecimento, [é] motivado pela resolução de problemas" internos ou externos à Matemática (p. 312). Numa outra investigação, a Matemática como actividade de resolução de problemas é inclusivamente a expressão usada para caracterizar a visão de uma das professoras sobre esta ciência (Martins, 1996).

As restantes investigações que analisei, a propósito das concepções sobre a actividade matemática, incidem sobre a resolução de problemas estudada do ponto de vista da sua utilização no ensino (Boavida, 1993; Fonseca, 1995; Oliveira, 1993; Vale, 1993). Todas elas encontram uma diversidade de concepções nos professores que estudaram, quer no que diz respeito à noção de problema, quer à forma como são entendidos o papel e a importância da resolução de problemas na Matemática e no ensino.

Numa dessas investigações, é considerado que os dois participantes "identificam problema e resolução de problemas com Matemática" e que atribuem "grande importância" a esta actividade, sobretudo como motivação e para "ensinar os alunos a raciocinar" (Vale 1993, p. 216). Este estudo identificou "inconsistências" entre estas concepções e a prática de um dos professores, propondo como hipóteses explicativas de tais inconsistências a existência de constrangimentos ou obstáculos diversos relacionados com as turmas — "alunos turbulentos e fracos" — ou com os professores do grupo disciplinar — "desmotivado[s]", "nunca ouviram falar da resolução de problemas" — ou ainda com o manual adoptado — "bastante tradicional", apenas com problemas de aplicação de fim de capítulo (pp. 218-219). A experiência deste professor como aluno, classificada "tradicional" no que se refere à resolução de problemas, é também colocada como um outro elemento explicativo, hipótese que não colhe no caso da outra professora que, com uma experiência prévia igualmente "tradicional", não revelou a mesma inconsistência, uma vez que as suas aulas "eram desenvolvidas dentro de uma dinâmica de resolução de problemas" (p. 219).

Numa outra investigação, refere-se uma professora que considera a resolução de problemas a "essência" da Matemática e que, por essa razão, deve ser a abordagem privilegiada no ensino desta disciplina (Oliveira, 1993, p. 227). Esta valorização também é referida no caso de uma outra das professoras do estudo mas não parece existir na terceira. A primeira professora considera que a resolução de problemas é uma "peça fundamental na formação dos alunos (...) para o estudo da Matemática nos anos futuros (...) para a preparação para a vida activa" (p. 122), propósito formativo também valorizado pelas outras professoras e que é especificado com referências ao contributo da resolução de problemas para o "desenvolvimento do raciocínio" dos alunos e para uma melhor percepção sua da "utilidade" da Matemática e das suas "aplicações" (p. 221, pp. 227-228). No mesmo estudo, contudo, é considerado que, no seu conjunto, as professoras davam pouca atenção à resolução de problemas no ensino pois "nenhuma delas demonstrou dar-lhe prioridade entre as actividades que levavam a cabo nas suas aulas" (p. 228). Também neste caso, as justificações para a presença limitada da resolução de problemas na prática de ensino relacionam-se com constrangimentos curriculares — "[necessidade de] dar o programa" (p. 189); "nem todos os conteúdos são propícios" (p. 227) — e com o manual adoptado (p. 205).

De estas professoras é dito que caracterizam um problema como sendo uma situação de carácter não rotineiro, em que são colocadas questões para cuja resposta não se dispõe, desde logo, de uma estratégia completa e bem definida. A actividade de resolução de problemas é caracterizada com atributos do tipo: "não [é] mera repetição", "implica experimentação (...) verificação (...) discussão (...) (p. 119); requer "paciência" ou persistência" (p. 229); exige "algo mais que a simples aplicação de uma técnica ou algoritmo" (p. 163). Cabe aqui dizer que, para uma das professoras, por possuir atributos como estes, a resolução de problemas constitui um "desafio" e "fonte de enorme prazer" (p. 229). Numa outra, pelo contrário, tais qualidades não constituem motivação ou interesse: "não me atrai resolver problemas se não tenho facilidade em estabelecer (...) os passos para os resolver" (p. 162). Esta professora afirmou ter dificuldade em distinguir exercício de problema.

A dificuldade na distinção entre problema e exercício é também notada num outro estudo que apresenta o caso de um professor para quem "problemas são todas as propostas que obedecem a uma resolução" (Boavida, 1993, p. 209). É afirmado que esse professor usa os dois termos "indistintamente" e que parece tê-los como "sinónimos": uma questão pedindo o cálculo com radicais, por exemplo, é considerada como um problema[1]. Esta visão, todavia, não é a dos outros participantes do mesmo estudo que caracterizam um problema

[1] Segundo o estudo em questão, o professor distingue entre "problemas/exercícios" (tarefas explicitamente sobre "matéria"matemática) e "outros problemas" que exemplificou com "situações relacionadas com o dia a dia" ou do "tipo charadas", descritas como situações que visam o desenvolvimento raciocínio mas que não têm uma relação directa com o programa (Boavida, 1993, pp. 209-210).

recorrendo a atributos como os que atrás já foram mencionados: tarefa "não rotineira" (p. 220), "[cuja resposta] não se obtém directa e simplesmente a partir da realização de cálculos" (p. 229). Também neste estudo surgem professores que atribuem um papel de relevo à resolução de problemas na Matemática, nomeadamente no seu desenvolvimento. Há inclusivamente quem considere que a resolução de problemas está na origem da Matemática (ou que ela surgiu para resolver problemas práticos correntes embora, na sua evolução, se tenha autonomizado dessa ligação com o 'exterior' e passado a existir problemas "criados pelos matemáticos que não correspondem nada à nossa vida corrente" (p. 227). Para um dos professores com este entendimento, os matemáticos têm, desde cedo, uma "curiosidade de conhecer" e é a sua grande capacidade de abstracção o que os "leva a ver mais além"(p. 228). É com a resolução de problemas em aberto, actividade considerada como muito exigente em termos do "esforço" e da "persistência" a que obriga, que produzem conhecimento matemático novo: "criam Matemática, criam problemas, criam a demonstração de um teorema" (p. 228).

A concluir. Os estudos realizados em Portugal sobre concepções dos professores, no que à Matemática diz respeito, centraram-se sobretudo no ensino dessa disciplina, muitos deles, porém, com uma atenção ao conhecimento sobre as concepções dos professores relativas à Matemática cuja relação com a prática de ensino também investigaram. Até agora, a actividade matemática não foi objecto de investigação explícito ou, quando isso aconteceu, como referi, foi circunscrita a uma modalidade específica, a resolução de problemas, sempre analisada do ponto de vista da sua utilização no ensino.

O meu primeiro estudo sobre concepções dos professores procurou identificar e descrever essas concepções, tendo igualmente a Matemática como alvo ou campo de incidência principal[1]. A investigação que aqui relato dá continuidade a esse meu primeiro trabalho mas, a uma análise das concepções com a mesma ampla incidência — a Matemática —, acrescenta um estudo de foco mais circunscrito centrado na actividade matemática. Esta actividade é aqui entendida no sentido genérico de 'fazer Matemática', ou seja, no sentido que

[1] E também o ensino desta disciplina (Guimarães, 1988).

encontramos na pergunta: "o que fazemos quando fazemos Matemática?"[1]. Como consta nas questões orientadoras desta investigação, pretendo descrever como os diferentes participantes caracterizam a actividade matemática, tendo em mente modalidades de que ela se pode revestir — por exemplo, calcular, pesquisar regularidades, conjecturar, demonstrar, matematizar, resolver problemas — e 'ingredientes' quer específicos da Matemática — no que se refere, por exemplo, à terminologia, regras, técnicas e procedimentos, e conceitos — quer de índole geral — por exemplo, memorização e compreensão, intuição e lógica, abstracção, representação simbólica e manipulação simbólica[2].

[1] Esta pergunta é o título de um artigo de Ernst Snapper (1988) em que o autor, todavia, apresenta uma visão restrita da actividade matemática, uma vez que, como diz, "fazer Matemática consiste na criação mental de estruturas matemáticas e a *demonstração de teoremas sobre elas*" (em itálico no original), acrescentando ainda que "se não provamos coisas, não estaremos certamente a fazer Matemática" (p. 54).

[2] Schoenfeld (1992) considera a abstracção e a representação e manipulação simbólicas "os instrumentos (*tools*) da Matemática" (p. 335), por sua vez incluídos no conjunto dos "modos de pensamento matemático" que o relatório *Everybody Counts* (NRC, 1989) apresenta, a par com a modelação, a optimização, a inferência e a análise lógica (p. 31).

II — Metodologia

Este estudo insere-se na área de investigação sobre o pensamento e conhecimento do professor, incidindo especificamente sobre as suas concepções, no caso, sobre a Matemática e a actividade matemática. O seu propósito principal é descrever detalhada e aprofundadamente os principais traços dessas concepções nos professores estudados, de forma a poder constituir um contributo para compreensão dos processos mentais e do conhecimento de que o professor dispõe e utiliza na sua prática pedagógica e também das suas acções nessa prática. Tais concepções, por natureza, não são directamente observáveis e, além disso, nem sempre são perceptíveis com facilidade e explanadas com clareza, sendo geralmente tácitas e de difícil explicitação. A sua escolha para objecto deste estudo e a intenção em as investigar considerando os pontos de vista e os significados dos sujeitos estudados decorre de (e também implica) uma opção metodológica de base que apresento e justifico neste capítulo. Também aqui apresento e descrevo a modalidade de investigação e os instrumentos de pesquisa a que recorri, bem como os procedimentos seguidos com cada um no desenvolvimento do trabalho.

Um estudo qualitativo

O interesse que a psicologia social teve, nos primeiros anos do século XX, em relacionar as crenças das pessoas com as suas acções, desvaneceu-se nos anos que se seguiram com a emergência do 'behaviorismo', tendo apenas regressado no princípio da década de oitenta, com o desenvolvimento da ciência cognitiva na década precedente (Erickson, 1986; Thompson, 1992). Até ao final dos anos setenta, sensivelmente, a investigação sobre o professor para compreender as decisões e acções que ele empreende na sua prática ocorria, de um modo geral, sob a influência das teorias de carácter comportamentalista, incidindo essencialmente sobre a sua *performance*. Estudava-se o exterior, o 'visível', por um lado, porque só era considerado passível de investigação o que se podia observar directamente e, por outro lado, porque o comportamento do professor era considerado explicável apenas por causas exteriores. No seu desempenho, o professor era visto sobretudo como um ser reactivo, isto é, as suas acções e decisões eram encaradas como reacções essencialmente determinadas por factores externos.

Estas são as razões que Fenstermacher (1978) aponta para que, na investigação educacional, se tenham, até muito recentemente, preterido os estudos na área da cognição ou do pensamento do professor: a ideia de que o pensamento, não sendo directamente observável, mas apenas acessível por inferência, "não é o objecto adequado para a investigação empírica" (p. 173), e a de que "os factores causais que explicam o comportamento são externos à pessoa" (p. 173). A noção de mente, como diz Erickson (1986) não era considerada necessária, e tais ideias correspondiam, segundo este autor, à importação do modelo positivista das ciências naturais para as ciências sociais admitindo, no mundo social, uma uniformidade e um mesmo tipo de relações causais das que, naquele modelo, são pressupostas no mundo natural. Na perspectiva positivista, os seres humanos, diz-nos Erickson, são equiparados aos animais e aos átomos e "para compreender tais relações causais são utilizadas metáforas [mecânicas, químicas, ecológicas], "imaginando os seres humanos em sociedade como uma máquina, um organismo ou um ecossistema de entidades animadas ou inanimadas" (p. 126). Para o mesmo autor, a "caixa de Skinner" e as peças interligadas numa grande máquina constituem, até aos finais dos anos setenta, "as principais metáforas" para a sala de aula e para os sistemas escolares, respectivamente, que orientam grande parte da investigação sobre o professor o que significa, como atrás foi mencionado, à exclusão da noção de mente na investigação.

Ora, estudar as concepções do professor corresponde, justamente, ao "regresso da mente" às preocupações de investigação, a considerar "a vida mental dos professores (...) de uma importância crucial para o estudo do ensino" (Erickson, 1986, p. 127). E, em termos de perspectivas de investigação, corresponde ainda a uma rejeição das ideias comportamentalistas, quer por se considerar como objecto de investigação algo que não é directamente observável, quer por ter em conta factores internos como elementos explicativos do comportamento das pessoas. Implica por isso, também, reconhecer, para lá de uma eventual determinação externa da acção ou comportamento do professor, uma determinação interna desse comportamento ou acção, ou seja, como diz Alba Thompson (1982) assumir a influência na actuação do professor de dois tipos de factores "que operam interdependentemente" (p. 7): factores de natureza situacional, que 'vêm de fora', com origem nas situações, e factores de carácter intencional, que 'vêm de dentro', com origem no sujeito.

Também, Heinrich Bauersfeld (1980), distanciando-se das correntes externalistas ou comportamentalistas, reconhece uma causalidade interior da actuação do professor, considerando que, no processo de interacção professor-aluno na sala de aula, as acções do professor não são meras reacções às acções do aluno. "É vulgar acreditar-se", diz Bauersfeld, "que uma pessoa reage às acções de outra, quando, na verdade, reage à interpretação que ela própria faz [da acção da outra pessoa]" (p. 30). E, evidenciando mais ainda a sua rejeição do modelo estímulo-resposta para estas situações, faz notar que o termo "reagir" utilizado na frase citada é enganador, uma vez que as acções dos intervenientes "são geradas através de uma actividade reflexiva interna complicada" (p. 30). "Esta actividade reflexiva subjectiva" continua ainda o mesmo autor, "tem em conta, não só as acções efectivas e perceptíveis das outras pessoas, mas também interpretações mais gerais da situação e o nosso próprio papel nessa situação." (p. 30). Deste ponto de vista, as reacções da pessoa não são comportamentos mas acções no sentido que Erickson (1986) lhes dá, uma vez que não são actos puramente físicos e exteriores mas incorporam os significados que a pessoa detém, trazendo consigo marcas da sua interioridade ou subjectividade. Para Erickson o comportamento (*behaviour*) é o "acto físico" e a acção (*action*) é o "comportamento físico acrescido dos significados (*meaning-interpretations*) que o actor e aqueles com os quais ele está em interacção detêm" (pp. 126-127). Esta é uma distinção considerada "crucial" pelo autor e que caracteriza a perspectiva a que chama "interpretativa" na investigação. Segundo esta perspectiva, o objecto da investigação social, diz-nos Erickson, "é a acção, não o comportamento", e se as pessoas actuam com base nas interpretações que realizam e nos significados que elaboram, estes significados "são eles próprios causais para os humanos" e a natureza da causalidade na interacção humana é assim muito diferente da causalidade na natureza: "os seres humanos atribuem significado simbólico às acções dos outros e realizam as suas próprias acções de acordo com as interpretações que fizeram" (p. 127).

Há, neste ponto de vista, uma valorização da interioridade do professor, considerando-se que a sua actuação (acção ou comportamento) não é determinada do exterior, pela situação com que o professor se confronta, mas antes, pela interpretação que ele faz dessa situação. Ou seja, pelo significado ou conjunto de significados que ele elabora com base em todo o seu património conceptual e sistema de concepções, relativos aos vários elementos da situação. Por isso, como bem faz notar Doug Jones (1988), as concepções dos professores poderão ser encaradas como outra das "dimensões escondidas" do ensino da Matemática de que fala Heinrich Bauersfeld no artigo já citado. Clark e Peterson (1986) referem um trabalho de investigação do final dos anos setenta, que consideram ser dos primeiros onde se procura compreender os processos mentais do professor, onde também já se sublinha a importância do estudo desse 'lado' do ensino da Matemática: "um olhar para este lado 'escondido' do ensino poderá aumentar a nossa compreensão de alguns dos aspectos mais visíveis e mais conhecidos do processo" (p. 256).

Assim, pelo objecto deste estudo e pelo propósito com que ele é realizado, a opção metodológica de base por que decidi integra-se na perspectiva interpretativa ou qualitativa da investigação[1]. A modalidade escolhida foi o estudo de caso uma vez que a incidência da investigação é um "sistema limitado" (*bounded system*) — na circunstância, professores — cuja particularidade ou singulari-

[1] Para Erickson (1986), aquilo que principalmente caracteriza a investigação interpretativa é " o interesse central no significado humano na vida social e na sua elucidação e exposição pelo investigador" (p. 119). Erickson usa a expressão "investigação interpretativa" englobando a investigação qualitativa e outras — etnográfica, fenomenológica, observação participante, estudo de casos, etc. — precisamente para fazer ressaltar essa característica que é comum a essas abordagens. Este autor chama ainda a atenção que o que mais distingue a investigação realizada nesta perspectiva é o seu conteúdo e objectivos e não os procedimentos de que se socorre — "uma *técnica* de investigação não constitui um *método* investigação" (p. 120).

dade é ela própria objecto de estudo, sobre o qual o investigador não tem (e não pretende ter) qualquer controlo (Merrian, 1988; Yin, 1984). É, além disso, uma modalidade de investigação adequada quando se pretende compreender em profundidade uma situação num registo exploratório, mas também descritivo e analítico, e evidenciar os aspectos singulares mais relevantes que a caracterizam. O recurso a vários casos tem por objectivo gerar evidência diversificada, e em maior quantidade, e possibilitar, com o seu confronto, uma iluminação mútua desses casos, bem como a identificação de elementos de homogeneidade (aspectos comuns, convergências, semelhanças) e de heterogeneidade (singularidades, divergências, contrastes).

As opções metodológicas instrumentais

A recolha do material empírico foi realizada directa e pessoalmente por mim próprio no local de trabalho habitual dos participantes do estudo, para possibilitar uma interacção com cada um deles no seu ambiente profissional. Com este propósito, recorri a entrevistas de longa duração pensadas com o sentido que McCraken (1988) lhes dá quando as descreve como: "um processo de entrevista claramente focado, rápido e altamente intensivo que procura diminuir a indeterminação e redundância presentes em processos de investigação menos estruturados"[1] (p. 7) e, no caso das professoras, recorri também a entrevistas curtas e à observação de aulas. Deste modo, no pressuposto de que para a identificação e descrição das concepções dos participantes o 'dizer' e o 'fazer' constituem uma "unidade inseparável" (Bruner, 1997, p. 29) , foi considerado o 'dizer' e o 'dizer sobre o fazer' (nas entrevistas) e, no caso das professoras, também o próprio 'fazer' (na observação de aulas). O trabalho de campo decorreu durante pouco mais de um ano, com início em Março de 1993 e conclusão no final do mês de Maio de 1994.

A opção pela entrevista longa — "um dos mais poderosos métodos do equipamento (*armory*) qualitativo" (McCraken, 1988, p. 9) — justifica-se pela

[1] McCracken (1988) confronta o que chama "entrevistas longas" com as "entrevistas etnográficas não estruturadas" e com a "observação participante", distinguindo-as destas, no primeiro caso, precisamente por "adoptarem deliberadamente um formato menos obstrutivo e mais eficiente", e no segundo caso, por "permitirem atingir certos objectivos etnográficos sem sujeitar o investigador a um envolvimento íntimo, continuado e prolongado na vida e na comunidade do respondente" (p. 7).

incidência e propósito do estudo e pelo tipo de descrição e análise pretendidas. A entrevista desta natureza favorece o acesso "ao mundo mental" dos participantes e à forma como eles se vêem a si próprios e aos seus mundos; é desse modo possível aceder ao "conteúdo e regularidades da experiência diária" das pessoas e "ver e experimentar o mundo como elas próprias o fazem" (p. 9). Este instrumento permite confrontar as interpretações que o investigador realiza de determinados acontecimentos ou acções em que o entrevistado está (ou esteve) envolvido com os significados que este lhes atribui e, em associação com a observação, é considerado "necessário", justamente quando o objecto de estudo são as suas concepções: "quando se trata de recolher dados válidos sobre as crenças, as opiniões e as ideias dos sujeitos observados" (Lessard-Hébert, Goyette e Boutin, 1994, p. 160).

A observação foi utilizada nesta investigação como forma complementar de aceder à informação pretendida, privilegiando as professoras, dado o meu interesse prioritário pelo ensino da Matemática nos níveis básico e secundário. Utilizada em conjunto com outros meios de recolha de informação empírica, , para responder a questões formuladas para investigação, a observação é um acto intencional (portanto deliberado e orientado por objectivos) e deve ser conduzida de forma sistemática. É, assim, um processo formal, sempre selectivo e fortemente relacionado com os objectivos com que é conduzido, a que se recorre para representar determinada realidade (Evertson e Green, 1986).

No processo de observação é assumido que a observação, utilizada, em conjunto com outros meios de recolha de informação empírica, para responder a uma questão ou a questões formuladas para a investigação, é um acto intencional (portanto deliberado e orientado por objectivos) e deve ser conduzida de forma sistemática. É, assim, um processo formal, sempre selectivo e fortemente relacionado com os objectivos ou finalidades com que é conduzido, a que se recorre para representar determinada realidade (Evertson e Green, 1986).

No que se refere à determinação do contexto da observação a que a opção metodológica de base conduz, Evertson e Green (1986) estabelecem um contínuo entre o que designam por "abordagens exclusivas" e "abordagens inclusivas". As primeiras, correspondem a abordagens em que os factores de contexto são totalmente controlados — "o que é observado está pré-determinado" (p. 167); as segundas, a abordagens em que tal controlo não existe, de modo que "nenhum aspecto do contexto é deliberadamente excluído" (p. 167). Neste contínuo, a presente investigação está mais próxima do segundo pólo do que do primeiro, pois embora orientada pelas questões da investigação, não existiu uma determinação prévia completa do que foi observado e procurei conseguir um registo tão largo quanto possível da realidade em observação.

Relativamente às formas de recolha das observações, seguindo ainda a conceptualização proposta por Evertson e Green (1986), o sistema por que optei é de natureza "aberta" com outras características dos sistemas classificados como "descritivos" e "narrativos". Para Evertson e Green, um sistema de observação é fechado quando não são acrescentadas novas categorias durante a observação, para a qual é definido "um número finito de categorias preestabelecidas" (p. 169) que a estruturam completamente, tornando-a assim estritamente "confinada à identificação e registo de comportamentos contidos no próprio sistema" (p. 169). Tal não foi o caso desta investigação uma vez que, se foram definidas antecipadamente algumas categorias que orientaram a observação, foram integradas outras que emergiram no processo. Esta opção corresponde, justamente, à noção de sistema aberto que, segundo Evertson e Green, pode incluir categorias predefinidas bem como categorias "geradas a partir de regularidades observadas" (p. 170).

Tanto nos sistemas descritivos como nos narrativos, "o significado é visto como específico do contexto" e a incidência da observação — "comportamentos, acontecimentos, processos" — é delimitada antes e durante a própria observação e tem em conta "os limites naturais em que ocorrem" esses comportamentos, acontecimentos ou processos (Evertson e Green, 1986, p. 169). Em ambos os casos se procura "obter descrições detalhadas do fenómeno observado [e] identificar princípios gerais a partir de situações específicas generalizando entre casos ou no interior de um caso" (p. 169). Sendo, uns e outros, sistemas abertos, o que principalmente os distingue é que num sistema narrativo não existem categorias preestabelecidas, digamos que é 'totalmente' aberto, enquanto que num sistema descritivo podem existir tais categorias. Além disso, nos primeiros são usados, fundamentalmente, "diários de bordo", "registos de episódios" ou "notas de campo", enquanto que nos descritivos se utilizam "análises descritivas estruturadas". Em uns e outros a observação incide sobre "amplos segmentos dos acontecimentos", nos descritivos o observador recorre a registos permanentes efectuados com recurso a tecnologia de gravação e, nos narrativos, produz descrições escritas ou registos orais que descrevem verbalmente esses acontecimentos (Evertson e Green, 1986, pp. 169-170).

A natureza dos dados e a perspectiva analítica geral

O processo de análise de dados ele foi iniciado logo na sequência da primeira entrevista. A recolha do material empírico começou com as entrevistas aos matemáticos após as quais se sucederam as entrevistas às professoras e, de forma intercalada, a observação de aulas. O material coligido no trabalho de campo é assim, na sua quase totalidade, originário de duas fontes, ou se quisermos, obtido com o recurso a dois tipos de instrumentos: as entrevistas e a observação de aulas. Das primeiras, foram obtidas transcrições escritas efectuadas a partir das suas gravações áudio e a segunda, deu origem a notas de campo e registos de aula, igualmente escritos, elaborados com base em elementos manuscritos e audio-registados durante o processo de observação. Por conseguinte, num e noutro caso, a análise vai incidir sobre textos escritos que, podemos dizer, 'reconstroem' processos vividos por mim próprio enquanto investigador, no primeiro caso, um processo essencialmente de comunicação e, no segundo caso, um processo essencialmente de observação[1].

Tais reconstruções não são todavia exactamente da mesma natureza, nem possuem o mesmo vínculo com o processo que reconstroem. Nas entrevistas, a transcrição reproduz literalmente o discurso dialógico entre o entrevistador e o entrevistado e, por isso, possui um forte vínculo com esse discurso, do qual está muito próxima. É, por conseguinte, uma reconstrução de natureza factual puramente descritiva onde, por via de regra, não intervém interpretação que ultrapasse a que a composição sintáctica do texto obriga, em particular e quase exclusivamente, no que se refere à sua pontuação, necessária, justamente, para que o texto tenha sentido e para "reconstituir aproximadamente o movimento

[1] O 'essencialmente' não é despiciendo uma vez que nas entrevistas também intervém a observação que dá conta, por exemplo, de aspectos da comunicação não verbal ou relativos ao contexto ambiental da entrevista, enquanto que, no processo de observação de aulas, por sua vez, existe também uma componente comunicacional introduzida pela minha interacção verbal com as professoras, sobretudo nas entrevistas sobre as aulas observadas.

vivo da elocução oral" (Cunha e Cintra, 1986, p. 63)[1], ele próprio também indutor de sentido. A pontuação, sem a qual a transcrição escrita seria, em muitas situações, senão ininteligível, pelo menos de difícil compreensão, é inferida a partir da audição das pausas e entoações do discurso oral e de outros "inumeráveis recursos rítmicos e melódicos da língua falada" (p. 639) detectados nos registos sonoros, e conferida pelo sentido, e portanto, pela interpretação, do discurso oral audio-registado. No processo de observação, o registo de aula é também uma reconstrução predominantemente descritiva mas menos próxima dos factos observados e com um vínculo menos profundo com eles. A sua elaboração é mediada pela interpretação que intervém de forma mais notória e intensa, uma vez que integra elementos de natureza analítica e apreciativa, quer na selecção *in situ* dos factos ou acontecimentos que irão compor o registo, quer na posterior estruturação e redacção desse registo.

O processo de análise teve início com um exame preliminar da primeira das entrevistas longas que visava sobretudo o planeamento da segunda entrevista. Importa dizer que, num sentido mais amplo, a análise começou mesmo antes da recolha de dados com a definição do enquadramento teórico e das principais questões da investigação, bem como com a própria escolha dos participantes do estudo e dos instrumentos de recolha de dados. Estes momentos da investigação integram-se no processo de redução de dados, mais precisamente, na "redução antecipada de dados" que Miles e Huberman (1984) mencionam como antecedendo a recolha de material empírico[2] e cuja importância justificam pelo facto de "conduzir a dados que são radicalmente mais ricos para a análise [subsequente]" (p. 25). Na verdade, esses momentos da investigação contribuem *a priori* para a selecção dos dados e para os centrar de acordo com o objecto e propósito do estudo e, para além disso, têm um papel importante na recolha do material empírico e no desenvolvimento completo da análise. Para Miles e Huberman a redução de dados faz parte integrante do processo de análise, visto como conjugação de "três fluxos concorrentes de actividades", "Redução dos dados",

[1] É, como os autores citados o referem, uma forma de "suprir [a] carência" da língua escrita face à quantidade de recursos de que a língua falada dispõe e a escrita não (Cunha e Cintra, 1986, p. 639).

[2] Estes autores subdividem a redução de dados em "antecipada" (*antecipatory*), "no interim" (*interin*) e "posterior" (*post*), conforme o momento em que se realiza relativamente à recolha do material empírico (Miles e Huberman, 1984, p. 25).

"Apresentação dos dados" e "Formulação/verificação das conclusões", sendo a redução de dados que "clarifica, ordena, centra, exclui e organiza os dados de modo a que as conclusões finais possam ser formuladas e verificadas" (p. 23).

Embora teoricamente informado e enquadrado por categorias analíticas definidas antecipadamente com base na literatura (anexo 6), o processo analítico foi orientado não numa lógica de prova, mas numa lógica de descoberta, subordinando essas categorias à compreensão de cada um dos casos estudados. Ou seja, no que se refere ao papel da teoria, esta investigação desenvolveu-se não com o intuito de provar ou testar determinadas teorias, hipóteses, ou conceitos preestabelecidos, mas considerando que estes podem também emergir da própria investigação[1]. O desenvolvimento da análise não visa assim apresentar provas de tipo causal mas "a demonstração da plausibilidade" das asserções interpretativas realizadas, "persuadir a audiência que existe evidência adequada para garantir [essas asserções]", propósito considerado mais adequado para a investigação social (Erickson, 1986, p. 149).

Os participantes na investigação

Os participantes deste estudo são duas professoras de Matemática do ensino básico e secundário e dois matemáticos, professores do ensino superior universitário. A inclusão destes dois tipos de participantes tem o propósito de introduzir no estudo sujeitos com experiências profissionais distintas, muito em particular, no que diz respeito à Matemática e à actividade matemática, mas também relativamente ao ensino desta disciplina. Para a escolha das professoras o único critério definido foi o de serem docentes profissionalizados com nomeação definitiva e possuírem mais de cinco anos de exercício profissional. Este critério foi utilizado no pressuposto de que os professores assim escolhidos teriam uma inserção aprofundada na profissão e uma experiência significativa com a Matemática escolar e com os problemas do seu ensino e aprendizagem. As professoras foram seleccionadas de entre um grupo de cerca de uma dezena de

[1] Lessard-Hébert, Goyette e Boutin (1994) falam em "contexto de prova" e "contexto de descoberta" para distinguir entre uma situação em que a investigação "tem como objectivo primordial a *verificação* de uma dada teoria, independentemente da maneira como esta foi elaborada ou formulada, e, a situação em que "o investigador foca a *formulação* de teorias ou de modelos com base num conjunto de hipóteses que podem surgir, quer no decurso, quer no final da investigação" (p. 95, itálicos dos autores)

participantes num curso de formação sobre didáctica da Matemática, solicitado por um Centro de Formação de Professores que agregava um conjunto de escolas de Lisboa. Esta opção foi tomada por questões de facilidade de acesso aos professores e também por assumir que a inscrição num curso de formação era um indicador de características que considerava relevantes nos eventuais participantes na investigação que pretendia realizar: interesse no seu próprio desenvolvimento profissional e investimento na profissão. Para introduzir alguma diversidade ao nível do ambiente profissional e da população escolar, seleccionei duas professoras que não pertenciam à mesma escola.

Os matemáticos que vieram a integrar este estudo foram seleccionados tendo igualmente em conta a sua larga experiência como professores universitários e por serem investigadores com trabalho científico reconhecido. A área matemática onde este trabalho é exercido constituiu um outro item que orientou a escolha, uma vez que pretendia incluir, no meu estudo, matemáticos oriundos das áreas habitualmente conhecidas como Matemática Pura e Matemática Aplicada, como veio a acontecer. Este item foi considerado com o pressuposto de que assim conseguiria uma maior diversidade relativamente aos modos de ver a Matemática enquanto ciência.

Uma vez que o estudo que pretendia levar a cabo era, pela sua natureza e propósito, um estudo mais intensivo que extensivo e, portanto, em que privilegiava a profundidade da inquirição à sua extensão, o número de participantes foi à partida limitado a seis — três matemáticos e três professores de Matemática — número que admiti adequado ao estudo e ajustado ao tempo de que dispunha para completar o trabalho de campo. Considerei também que, com esta opção, acautelava a hipótese de alguma desistência ou impossibilidade declaradas no decorrer do estudo e, por outro lado, se estas situações não se verificassem, tinha ainda margem para reduzir o número de participantes, caso se se justificasse, e escolher de entre os que considerasse melhores informantes.

Assim, iniciei a investigação com seis participantes sobre os quais incidiu a recolha de material empírico. Terminada esta recolha, veio a verificar-se que numa das professoras, a última a entrar na investigação, o material coligido, não só não acrescentava elementos significativos aos dados já recolhidos junto das outras duas professoras, como o facto de leccionar no ensino nocturno, introduzia demasiada disparidade, que não tinha previsto, em relação àquelas professoras, disparidade que não considerei relevante para os objectivos do estudo. Tomei por isso a decisão de excluir esta professora do estudo, o que me levou também a deixar de fora um dos três matemáticos. Neste caso, a escolha recaiu igualmente sobre o último a ser entrevistado, uma vez que um exame preliminar dos seus dados mostrou existir muita convergência com o caso de outro matemático cujo processo de análise já se encontrava adiantado.

A relação investigador-participante e o papel do investigador

As professoras que integraram este estudo não eram minhas conhecidas até à data da realização do curso de formação em que participaram e que foi preparado no âmbito de um projecto de pesquisa sobre os saberes do professor a que eu próprio pertencia, tendo sido um dos seus formadores. Também os matemáticos não faziam parte das minhas relações pessoais. Umas e outros, aceitaram a participação que lhes solicitei no primeiro contacto que tive com cada um, não tendo existido no processo de escolha nenhuma recusa. Na mesma altura foi-lhes assegurado o seu anonimato e foram informados do objecto e do propósito geral da investigação que pretendia realizar, bem como do tipo de colaboração que lhes iria pedir e do fim a que se destinava a investigação — a realização das minhas provas de doutoramento. Esta foi, fundamentalmente, a informação que transmiti aos professores que vieram a participar no meu estudo, para minimizar o perigo de a sua participação vir a sofrer algum enviezamento devido a um conhecimento antecipado excessivamente detalhado e aprofundado dos meus propósitos com a investigação.

A questão agora mencionada tem a ver com a relação investigador-participante, questão que em estudos qualitativos é de grande complexidade[1] e se reveste de uma importância porventura muito maior do que em estudos de outra natureza. Em particular, McCracken (1988), reconhecendo os méritos e potencialidades da perspectiva que vê o participante como um "colaborador" na investigação — nomeadamente no que se refere à transparência dos objectivos da pesquisa e à resolução de questões éticas associadas a estudos desta natureza — recomenda, todavia, alguma prudência e limites para o grau de colaboração

[1] McCracken (1988) considera mesmo "uma das diferenças principais entre a maioria da investigação qualitativa e a quantitativa reside no facto de que a primeira exige uma relação entre o investigador e o respondente muito mais complexa" (p. 25).

instituído. Há a possibilidade de a informação fornecida sobre a investigação conduza a que o participante dê "respostas estudadas e não completamente espontâneas" (p. 27) e se mostre ou responda de acordo com aquilo que imagina que são as expectativas do investigador. Demasiada "intimidade", diz-nos McCracken, pode "obscurecer e complicar o trabalho em mãos" (p. 26), defendendo que algum anonimato na entrevista favorece a sinceridade do entrevistado e a obtenção de respostas autênticas, mesmo aquelas que ele imagina poderem desagradar ou ir contra supostas expectativas.

McCracken (1988) sublinha ainda os efeitos nos participantes do conhecimento que possuem do investigador e da forma como este se lhes apresenta — a instituição a que pertence, aparência física, modo de vestir e de falar — considerando que os seus juízos a este respeito podem ter uma influência significativa nas reacções e respostas ao investigador. Para lidar com este problema, o autor propõe "um equilíbrio entre a formalidade e a informalidade" (p. 26) nas relações entre o investigador e o respondente, chamando a atenção que alguma formalidade contribui para o reconhecimento da faceta de cientista do investigador e que, desse modo, as suas perguntas ou interpelações sejam consideradas como fruto de interesse profissional e não como meros produtos da sua curiosidade. Além disso, tal formalidade contribui igualmente, como o mesmo autor também salienta, para a confiança no investigador, nomeadamente, nas garantias de anonimato prometidas. Um certo grau de informalidade, por outro lado, favorece, no respondente, uma visão do investigador como alguém sensível aos seus problemas, alguém que não é "frio", "distante" ou "indiferente às dificuldades e complexidades do [seu] mundo" (p. 26). Assim, na condução do trabalho de campo e nos contactos com os participantes, procurei algum equilíbrio entre a formalidade e informalidade na relação estabelecida e circunscrever a informação prestada sobre a investigação ao que considerei necessário por razões de carácter ético e para o desenvolvimento do estudo.

No que se refere ao papel do investigador, nos estudos de natureza qualitativa é frequentemente utilizada a metáfora do "investigador como instrumento", quer na recolha de dados quer na sua análise[1]. Com esta metáfora pretende-se

---

[1] Referindo-se ao processo de observação, Evertson e Green (1986) consideram que investigador é "o elemento principal" dado ser ele, como dizem, "o instrumento de observação e de registo" (p. 178) nesse processo. Sharan B. Merriam (1988) tem esta mesma posição relativamente ao papel do investigador num âmbito mais genérico ainda, considerando-o como o

dar ênfase à experiência e qualidades pessoais do investigador sem as quais os objectivos da investigação qualitativa dificilmente seriam atingidos dada a complexidade e profundidade deste tipo de investigação: o carácter "confuso" (*messy*) e "desorganizado" dos dados torna necessário fazer apelo "não só às capacidades cognitivas mais precisas e claras [do investigador] mas também a toda a sua experiência e imaginação (...) de forma a encontrar um quadro (*match*) para as regularidades evidenciadas pelos dados" (McCackren, 1988, p. 19). Este "eu como instrumento" significa assim o convocar do conhecimento teórico e experiencial do investigador de forma a conseguir estabelecer o referido quadro. No caso da presente investigação, na selecção das questões para as entrevistas e dos itens que orientaram e estruturaram a observação de aulas, bem como a análise e interpretação dos dados obtidos, intervieram elementos da literatura mas também, nomeadamente no processo de observação de aulas e sua análise, elementos da minha experiência de vários anos como orientador do estágio pedagógico da Licenciatura em ensino da Matemática. A reflexão e sistematização sobre observação e análise de aulas que tenho vindo a fazer, possibilitaram-me a interiorização de um património conceptual, terminológico, e técnico neste domínio, bem como o desenvolvimento de uma sensibilidade aos aspectos específicos da observação de aulas e da sua análise. Este saber técnico e analítico constituíram elementos importantes na condução da observação nesta investigação, em particular no processo de recolha de notas de campo e posterior organização e análise.

As entrevistas

Cada um dos professores do estudo foi entrevistado duas vezes, em entrevistas de longa duração — em geral de uma hora e meia a duas horas — e de natureza semi-estruturada, tendo também sido realizadas entrevistas de curta duração às professoras, integradas no processo de observação das suas aulas. Do ponto de vista do seu grau de estruturação, as entrevistas por que optei são semi-estruturadas pois, embora tenham sido conduzidas com base em guiões ou, no caso das entrevistas curtas, em algumas questões preestabelecidas, por um lado, as questões que as integraram eram maioritariamente questões abertas e,

"instrumento primordial para a recolha e análise dos dados" (p. 36) num estudo de caso de tipo qualitativo.

por outro, foram orientadas de forma flexível para integrar alterações na sequência prevista ou questões não planeadas motivadas pelas intervenções do entrevistado. São, por esta razão, entrevistas mais "orientadas para a informação" do que "para a resposta", usando a categorização de Powney e Watts (1987)[1], uma vez que pretendia sobretudo criar condições para o entrevistado explorar, ele próprio, as questões propostas e desse modo captar e compreender os seus pontos de vista.

Para as entrevistas longas elaborei dois guiões, um para os matemáticos e outro para as professoras (anexos 1 e 3, respectivamente) que, para além de um conjunto de itens que é comum aos dois, incluem questões que diferem conforme o tipo de participante a que se dirigem, com o propósito de tirar proveito da especificidade de cada um, particularmente, ao nível da sua experiência com a Matemática. No caso das professoras, as questões específicas incidem sobretudo em aspectos relacionados com o ensino e aprendizagem desta disciplina, e, no caso dos matemáticos, essas questões recaem principalmente sobre sua experiência como investigadores em áreas matemáticas.

Em cada guião, as questões estão organizadas de acordo com os temas e subtemas do estudo e apresentadas numa sequência que procurei seguir, não só para facilitar o processo de análise de dados mas também para que as diferentes questões surgissem, a cada entrevistado, sensivelmente no mesmo contexto da entrevista. Embora com esta preocupação, o guião não foi assumido como um plano para cumprir rigidamente, mas serviu principalmente de fio condutor das entrevistas e para garantir a cobertura dos temas e subtemas sobre os quais pretendia recolher informação. Sempre que o andamento da conversa em curso o justificou, introduzi alterações na sequência prevista das questões e foram intercaladas perguntas não planeadas motivadas por respostas do entrevistado, muitas vezes para obter maior esclarecimento, detalhe ou profundidade dessas

---

[1] Powney e Watts (1987) consideram entrevistas "orientadas para a informação" aquelas em que a principal preocupação do entrevistador é que o respondente "exprima os seus *próprios* interesses e preocupações sem se sentir demasiado espartilhado" (p. 18) e que, por isso, o seu desenrolar é sobretudo determinado pelo entrevistado. As entrevistas "orientadas para a resposta" são aquelas em que "o controlo permanece na posse do entrevistador durante todo o processo" (p. 17); são as suas perguntas que determinam toda a entrevista, pois pretende acima de tudo obter respostas para um conjunto de questões que tem previsto. Umas e outras, como os autores mencionados sublinham, poderão ser mais ou menos estruturadas, sendo que, no primeiro tipo, a estruturação é "imposta" principalmente pelo entrevistado.

respostas. Com este procedimento, pretendia conseguir uma melhor compreensão dos pontos de vista apresentados, mas também atenuar a formalidade a que uma situação de entrevista é propícia e que o diálogo decorresse de forma natural e fluente. Igualmente com o objectivo de minimizar os aspectos formais da entrevista, procurei interiorizar as questões previstas de forma a poder dispensar a consulta do guião completo no decurso de cada entrevista, tendo apenas utilizado uma versão simplificada desse guião (ver anexos 1 e 3). Esta opção permitiu-me ter sempre visível durante as entrevistas a totalidade dos itens previstos e, para além disso, a menor dimensão do guião reduzido, possibilitou, sempre que necessário, uma consulta mais discreta, fácil e rápida do que se utilizasse o guião completo.

No essencial, as entrevistas decorreram com base nas questões do guião, na sua maioria abertas e sem referências directas a teorias, ideias, ou pontos de vista sobre a Matemática e a actividade matemática, para evitar o efeito da presença dessas referências, isto é, para precaver um eventual enviezamento das respostas devido. Para além das questões, os entrevistados foram confrontados com um conjunto de 'episódios', intercalados nas entrevistas quer com os matemáticos, quer com as professoras (anexos 2 e 4, respectivamente). Para os primeiros, os episódios são um conjunto de frases de matemáticos que exprimem posições sobre a Matemática e sobre a actividade matemática, em relação às quais lhes pedia uma reacção. Cada um deles foi apresentado separadamente em momentos diferentes da entrevista, depois de ter sido abordado o assunto a que o episódio em questão se referia. Para evitar uma eventual influência da notoriedade do matemático autor da frase escolhida, o seu nome só era revelado depois da reacção do entrevistado e caso ele o tivesse solicitado.

Alguns dos episódios atrás mencionados foram utilizados nas entrevistas com as professoras a quem também apresentei alguns outros contendo frases de professores e de alunos do ensino básico e secundário, igualmente sobre a Matemática e a actividade matemática. As frases dos professores foram retiradas de material empírico de um estudo anterior a este (Guimarães, 1988) e as dos alunos imaginadas por mim com base na minha experiência. Recorri ainda a episódios de um outro tipo, consistindo em curtos relatos escritos relativos a situações de aula fictícias, alguns dos quais adaptados de outros estudos (Brown,

Brown, Conney e Smith, 1982), todas elas em torno de tarefas supostamente propostas a alunos ou realizadas por eles.

Assim, de acordo com o que atrás descrevi, os episódios utilizados são tendencialmente situações "abertas", umas mais do que outras, de tipo "realista" e em que, na interpelação ao entrevistado, é sempre a sua "voz" o que ése espera na reacção pedida (Cooney, 1985). O objectivo da sua inserção nas entrevistas era gerar alguma diversidade na interacção com o entrevistado recorrendo a uma 'terceira pessoa' presente através do episódio, pressupondo que este tipo de situação concorreria para um maior distanciamento em relação ao entrevistador. Para além disto, com o recurso ao apoio específico e concreto proporcionado por cada episódio, a expectativa era criar uma motivação acrescida e conseguir prolongar o discurso do entrevistado para obter mais informação a propósito do assunto em questão, eventualmente com mais detalhe e aprofundamento, ou para o motivar para um assunto ainda não abordado. São, podemos dizer, as "deixas planeadas"[1] (*planned prompts*) mencionadas por McCacken (1988) para conseguir que o entrevistado "considere e discuta fenómenos que não ocorreram prontamente à sua mente ou discurso" (p. 35). Para alguns dos episódios, o momento previsivelmente mais adequado para a sua introdução na entrevista estava assinalado no guião resumido e foi, em geral, cumprido, tendo os restantes sido introduzidos a propósito de algumas respostas ou intervenções do entrevistado.

Na preparação e condução das entrevistas, tive a preocupação de criar um clima tanto quanto possível de à-vontade e de mútua confiança. Para tal, foi respeitada a conveniência dos entrevistados no que diz respeito à escolha do local, data e hora das entrevistas e foram dadas garantias de confidencialidade de toda a informação recolhida e de anonimato em todo o material que viesse a ser divulgado na sequência da investigação. Procurei também ter em conta o mundo dos informantes, por exemplo no vocabulário, linguagem e conteúdo das questões que, segundo alguns autores, caso nada tenham a ver com o "universo dos valores e preocupações" dos entrevistados, podem conduzir a respostas que

[1] Serão, mais especificamente, "deixas auto-directoras" (*auto-driving prompts*) que McCraken (1988) caracteriza como "estímulos" — fotografias, vídeos, ou outros — para obter a reacção das pessoas (p. 36).

visam principalmente satisfazer o entrevistador[1], e desse modo ultrapassar uma situação que lhes é alheia (Ludke, 1986, p. 35), ou que podem traduzir aspectos do senso comum mais do que convicções pessoais profundas sobre os assuntos ou questões abordados.

As duas entrevistas a cada matemático decorreram durante o ano de 1993 e no início de 1994 e realizaram-se com cerca de oito meses de intervalo, a segunda das quais efectuada somente depois da conclusão de uma análise preliminar da primeira. Esta análise serviu essencialmente para identificar aspectos a esclarecer melhor ou a aprofundar na entrevista que se seguia, onde também foram abordadas as questões do guião que tinham ficado por tratar. As entrevistas foram realizadas numa série em que alternava os matemáticos de forma a poder ter em conta, nas entrevistas subsequentes, os resultados das análises preliminares das entrevistas entretanto já realizadas. A sua sequência e data de realização constam no calendário do anexo 7.

O processo de recolha de dados relativos às professoras decorreu entre Fevereiro e Maio de 1994. O período de tempo escolhido para essa recolha é relevante pois pode ter influência na natureza dos dados recolhidos: "as escolas são diferentes no início do ano e no seu final [assim como] as rotinas nas turmas podem ser muito diferentes de manhã ou de tarde" (Bogdan e Biklen, 1982, p. 63). O período por que optei foi escolhido por considerar que se situa numa zona do ano lectivo em que o conhecimento da(s) turma(s) por parte do professor e a relação professor-aluno(s) estão suficientemente consolidados, as actividades de ensino e aprendizagem estão em pleno desenvolvimento, e o final do ano escolar, altura em que o cansaço do professor e dos alunos pode fazer-se sentir, está ainda razoavelmente distante. Tendo isto em consideração, a separação temporal das duas entrevistas longas a cada professora foi limitada a três semanas, mas realizaram-se numa sequência alternada semelhante à descrita para os matemáticos. Entre as duas entrevistas a cada professora teve início o processo de observação de aulas, com o qual pretendia também gerar questões e temas relevantes para introduzir na segunda das entrevistas longas.

[1] Ludke e André (1986) consideram que a "imposição de uma problemática" é uma das "principais distorções que invalidam frequentemente as informações recolhidas por uma entrevista" (p. 35).

Durante o processo de observação, tiveram lugar as entrevistas de curta duração que ocorriam, em geral, logo após o termo de cada aula observada e com uma duração variável, muitas vezes dependente da disponibilidade da professora em questão. Estas entrevistas tinham como propósito recolher as primeiras impressões e reflexões das professoras sobre a aula — o 'dizer' sobre o 'fazer' de que fala Bruner (1997) — e foram por isso pensadas para serem conduzidas com alguma informalidade e sem grande estruturação. De um modo geral iniciavam-se com uma apreciação global da aula por parte da professora e eram orientadas de forma a captar o seu ponto de vista relativo a três questões-base: de que formas se revestiu a participação dos alunos?, que dificuldades sentiram?, até que ponto estiveram a 'fazer Matemática'?. Duas destas entrevistas, as últimas relativas a cada período de observação, foram um pouco mais demoradas, uma vez que pretendia realizar, com elas, um balanço do conjunto das aulas, incidindo em especial sobre a actividade matemática.

Todas as entrevistas longas foram audio-registadas recorrendo a um gravador de pequenas dimensões para que a sua presença fosse 'esquecida' o mais rapidamente possível. Durante a sua realização, tomei a opção de reduzir ao mínimo a recolha de notas manuscritas para procurar evitar distracções durante a entrevista e minimizar eventuais perturbações no entrevistado que tal recolha poderia provocar. Com esta forma de proceder, pretendia contribuir para a naturalidade e fluência do curso da entrevista e conseguir, da minha parte, uma maior disponibilidade para seguir, com atenção e entrega, o discurso verbal e gestual do entrevistado. Por conseguinte, recolhi apenas, esporadicamente, curtos apontamentos manuscritos sobre aspectos relativos à forma como as entrevistas iam decorrendo (por exemplo, sobre o seu ritmo, sobre a disposição e atitude do entrevistado, sobre a sua reacção geral às questões e sobre as características do discurso), muitos deles anotados logo após o termo da entrevista, já sem a presença do entrevistado. Estes apontamentos foram recolhidos para a descrição dos aspectos contextuais das entrevistas — materiais, ambientais, relacionais — bem como para a redacção da minha visão global sobre a forma como cada uma delas tinha decorrido, redigidos, no caso da primeira entrevista a cada participante, logo após a sua realização, para minimizar o efeito da diluição da memória e ter assim muito presente os aspectos da entrevista e do seu contexto sobre os quais desejava pronunciar-me. Relativamente às entrevistas de curta duração, recolhi apenas notas de campo manuscritas. Na última destas entrevistas relativas a cada série de observação, procedi também à sua gravação áudio, uma vez que eram um pouco mais longas que as outras. Os diversos momentos da recolha do material empírico são apresentados no calendário do anexo 7.

As entrevistas de longa duração foram transcritas para papel a partir da audição das gravações, por pessoas remuneradas para o efeito. De início, o processo de transcrição foi entregue a uma única pessoa mas, uma vez iniciadas as entrevistas às professoras, foi necessário recorrer a vários transcritores pois só assim era viável terminar as transcrições no período de tempo planeado. Cada entrevista, todavia, foi transcrita na sua totalidade pela mesma pessoa, tendo todas elas recebido, da minha parte, as instruções esse trabalho: transcrever integralmente a gravação; assinalar no texto transcrito palavras, expressões, ou frases sempre que existissem dúvidas da sua fidelidade em relação ao discurso oral gravado, devidas, por exemplo, a dificuldade de percepção na audição; e, sempre que essa dificuldade o obrigasse, deixar espaços em branco assinalando porções de discurso não transcrito. Para além disso foi pedida a indicação do nome do transcritor no cabeçalho da primeira página, bem como da data, hora, local e duração da entrevista, dados estes que constavam da gravação.

Cada uma das transcrições foi corrigida por mim através da leitura da cópia em papel, acompanhada pela audição do registo áudio da entrevista respectiva. Neste processo, corrigia o texto deficientemente transcrito ou não completado, deixando assinaladas as dúvidas que eventualmente persistissem, e procedia a ajustes na pontuação. Sempre que necessário, introduzia referências a aspectos da comunicação não verbal, nomeadamente, a ocorrência de risos ou de silêncio, indicando o tempo de pausa no discurso, se este fosse prolongado.

A observação de aulas

A observação de aulas foi solicitada por mim às professoras que aceitaram o meu pedido sem objecções e sem qualquer condição ou restrição. Para cada professora a observação decorreu em dois períodos, ambos abrangendo um conjunto de quatro aulas consecutivas (num caso foram apenas três), separados por cerca de dois meses. Esta separação temporal foi introduzida para que, em cada um dos períodos, assuntos matemáticos tratados fossem distintos e a opção de observar aulas consecutivas tinha como preocupação criar condições para poder apreciar o desenvolvimento, de aula para aula, do trabalho do professor e dos alunos. Para além disso, em ambas as professoras, as aulas de cada período foram observadas em turmas diferentes — numa delas, em turmas do 10º ano com características diferentes (por exemplo, número de alunos e aproveitamento escolar) e na outra, numa do 9º ano e noutra de Métodos Quantitativos — para assim introduzir alguma diversidade ao nível dos alunos. Os períodos de observação foram escolhidos de modo a que cada sequência de aulas abrangesse o tratamento de um assunto matemático novo introduzido na primeira aula da sequência. Com esta escolha podia observar a evolução do processo de ensino e aprendizagem relativo ao assunto matemático em tratamento e observar aulas que considero potencialmente ricas, nomeadamente no que se refere à manifestação das principais opções didácticas do professor.

Os períodos de observação de aulas e as turmas em que foi realizada foram escolhidos por indicação das professoras. O calendário em que acordámos teve apenas em consideração as restrições temporais atrás mencionadas e foi estabelecido de forma a contemplar as condições que defini para a observação e de que tinha informado as professoras (três a quatro aulas consecutivas, turmas diferentes para cada período de observação, introdução de um assunto matemático na primeira aula de cada período). Informei as professoras que não procurava aulas com nenhuma particularidade especial e que pretendia apenas que a observação incidisse em aulas que elas próprias considerassem 'normais' no quadro da sua prática de ensino corrente, isto é, inseridas no seu quotidiano lectivo habitual, quer no que diz respeito à sua preparação, quer à sua concretização. Dei ainda conhecimento que a observação era um complemento das entrevistas e que durante as aulas iria tirar notas escritas a que poderíamos recorrer nas entrevistas curtas que lhes tinha solicitado para o final das aulas.

Uma vez que com a observação pretendia recolher informação sobre a realidade das aulas das professoras, nomeadamente, no que se refere às suas opções didácticas e à forma como as concretizam, optei por realizar uma forma de "observação participante" (Evertson, 1986; Lessard-Hébert, Goyette e Boutin, 1994; Ludke e André, 1986). Esta opção permite uma inserção na realidade em estudo e investigar as "formas do viver de uma cultura ou grupo social" (Evertson e Green, 1986, p. 178), recolhendo informação sobre as perspectivas, ideias e acções dos sujeitos, tendo em vista compreender, do seu interior, a realidade em que se inserem, integrando os seus próprios pontos de vista. Decidi contudo por um envolvimento reduzido, não participando nos acontecimentos observados e não tendo tido, em nenhum momento, qualquer intervenção quer na preparação das aulas, quer na sua realização[1]. Esta opção permite uma maior disponibilidade para observação e um maior distanciamento, uma vez que o investigador não está envolvido em nenhum aspecto da prática lectiva do professor e, para além disso, minimiza o efeito da sua presença na prática do professor em observação. Ou seja, diminui os riscos de 'contaminação' dessa prática pelo investigador, naturalmente mais provável quando ocorre um envolvimento extensivo e profundo do investigador. Importa todavia dizer que o 'afastamento' deliberado do investigador pode, em contrapartida, dificultar a compreensão dos pontos de vista do professor sobre a prática que empreende[2]. As entrevistas de curta duração sobre as aulas observadas foram pensadas e realizadas, justamente, para contrabalançar tal afastamento e, em alguma medida, conseguir, através da interacção com as professoras a propósito dessas aulas, uma maior proximidade e compreensão dos seus pontos de vista sobre a prática lectiva observada. Esta maior proximidade e compreensão foram também visadas na segunda das entrevistas longas com as questões que introduzi a partir da análise das notas de observação.

Como preparação específica para o processo de observação de aulas e posterior análise, elaborei um guião contendo uma lista de itens, a considerar na recolha das notas durante as aulas, e respectiva especificação (anexo 5). Não utilizei qualquer grelha de observação ou outros instrumentos de natureza semelhante, optando por uma observação não focada embora conduzida tendo

[1] Corresponderá aproximadamente à observação participante do tipo "passivo" que Evertson e Green (1986) referem como aquela em que o observador não tem participação nos acontecimentos, embora não tenha assumido a postura de um completo *outsider* que estas autoras atribuem à observação participante passiva.

[2] Para além disso, não anula em absoluto a referida contaminação, uma vez que existe sempre, em alguma medida, participação ou influência do investigador, não apenas a que decorre do simples facto de estar presente nas aulas, mas também, como também aconteceu na presente investigação, a que é devida ao facto do professor estar de posse de elementos sobre a sua identidade pessoal e profissional, bem como dos seus interesses, ainda que gerais, relativos à investigação de que faz parte. Será certamente por estas razões que Ludke e André (1986) reservam, para o estatuto do investigador em situações de investigação como a descrita, a expressão de "observador como participante".

como pano de fundo os itens do guião — "Estrutura da aula", "Papel do professor", "Papel do aluno", "Ambiente de aula e interacções", "Actividades na aula" — e a sua especificação. A definição e a especificação destes itens tem contributos da literatura mas, como já mencionei, resultaram sobretudo da minha experiência como professor e formador de professores que me proporcionou um património conceptual e técnico para o processo de observação e análise de aulas, bem como o desenvolvimento de uma sensibilidade aos aspectos específicos desse processo.

A observação de aulas foi realizada a partir de um lugar onde me sentava durante as aulas, em geral na parte posterior da sala, escolhido com a anuição da professora e de forma a garantir boas condições de visibilidade do quadro e da turma em geral. Em várias ocasiões, sentei-me junto de um aluno, para que pudesse ter oportunidade de acompanhar mais de perto o seu trabalho. Como material de registo utilizei apenas o lápis e folhas A4 em branco que dividia em duas colunas de larguras diferentes. A coluna mais larga destinava-se ao registo de notas de carácter predominantemente factual e descritivo[1], e a mais estreita a chamadas de atenção e a apontamentos de natureza mais vincadamente interpretativa ou apreciativa[2]. A primeira folha era encimada por um cabeçalho contendo o número da aula na série de observação, a turma, e o dia, hora e sala em que se realizava (anexo 8).

Iniciava o processo de recolha de notas logo após me ter sentado, começando com o preenchimento do cabeçalho, a anotação do número de alunos presentes e o registo das notas relativas aos momentos iniciais da aula, mesmo antes da escrita do sumário, como por vezes aconteceu. A recolha prosseguia até ao final da aula, procurando anotar o maior número de elementos possível relativos aos aspectos da aula que considerava pertinentes e relevantes. Para poder ter uma ideia do ritmo da aula e dispor da distribuição temporal das suas

[1] Estas notas são do tipo observacional* (*observational*) a que Alba Thompson (1982) se refere, pois baseiam-se sobretudo no olhar (*watching*) e no escutar (*listening*) por parte do observador e tendem a incidir sobre "o 'quem', o 'o quê', o 'quando' e o 'como' da situação observada, contendo pouca interpretação" (p. 43). (*Tratar-se-á, eventualmente, de um neologismo que julgo adequado à tradução do termo utilizado por Alba Thompson).

[2] São, podemos dizer, notas com o cariz das que Thompson (1982) considera como do tipo teórico e metodológico, uma vez que se referem, respectivamente, "aos significados que o investigador extrai das notas observacionais, isto é, interpretações, inferências, hipóteses, e conjecturas (...) [e] às próprias acções do investigador na condução do estudo — instruções a si próprio, *reminders*, críticas etc" (p. 43).

fases, de dez em dez minutos, sensivelmente, escrevia a hora na folha de registo. Por vezes, interrompia a escrita pois não conseguia acompanhar o desenrolar dos acontecimentos relativos a determinado momento da aula e passava imediatamente a escrever sobre o momento seguinte entretanto iniciado. Nessas alturas, deixava algum espaço em branco e, sempre que me ocorria, uma ou outra expressão que, posteriormente, me pudesse auxiliar à reconstituição do que deixara sem registo. Em algumas aulas, realizei também a gravação áudio integral da aula para servir de complemento às notas manuscritas. Sempre que foi distribuído aos alunos algum material (por exemplo, uma ficha de trabalho) ele era-me também entregue pela professora na mesma altura. Terminada a aula, seguiam-se as entrevistas curtas, sempre que possível, imediatamente a seguir, para que os acontecimentos da aula estivessem ainda muito presentes.

Com base nas notas de campo manuscritas recolhidas durante as aulas e nas entrevistas que se realizavam no seu final, elaborei, para cada aula, um registo escrito organizado em quatro secções — "Estrutura e sequência da aula", "Desenvolvimento", "Actividades na aula", "Ambiente de aula e interacções" — a que anexava um conjunto de pontos relativos à entrevista pós-aula, redigidos a partir das notas recolhidas durante a sua realização (anexo 9). Esta organização e a definição do conteúdo de cada uma das secções seguiu de perto o guião de observação, embora com uma ordenação diferente que considerei mais adequada para um registo de aula. Assim, a primeira secção dá conta da incidência principal da aula, de como se iniciava e terminava, e das suas principais fases ou momentos mais diferenciados. A secção "Desenvolvimento" é uma descrição cronológica dos acontecimentos na sala (com menções relativas ao papel do professor e ao papel do aluno), apresentada sob a forma de uma sequência de episódios de carácter narrativo, elaborados a partir das notas manuscritas durante a aula. Estes episódios têm em comum com os "trechos narrativos" (*narrative vignettes*) de que Erickson (1986) fala, o facto de procurarem proporcionar "um retrato vívido" dos acontecimentos na sala de aula, "descrevendo o que foi sendo dito e feito na sequência natural da sua ocorrência na realidade" e assim proporcionar ao leitor "o sentimento de *estar lá*" (p. 149-150), no momento dessa ocorrência[1]. Na secção "Actividades na aula" são

[1] Os episódios aqui referidos, tal como as *vignettes* de Erickson (1986), possuem um carácter analítico uma vez que apenas captam e destacam determinados aspectos da realidade observada,

enunciadas as tarefas levadas a cabo durante a aula, com indicações sobre a forma como foram realizadas. Na última secção procuro caracterizar o ambiente geral da aula e as interacções dominantes, referindo também aspectos de comunicação e de relação professor-aluno, o tipo de participação e envolvimento dos alunos, o modo de estar do professor, e, ainda, interrupções, tempos mortos e perturbações de carácter disciplinar ou de outra natureza. Cada um dos registos de aula era numerado com o número de ordem da aula na sequência da observação a que dizia respeito, e continha, a abrir, a indicação do dia, hora e sala em que aula ocorria, bem como o sumário ditado pela professora para essa aula.

A análise dos dados

A análise incidiu sobre o conteúdo dos textos a que as entrevistas e o processo de observação deram origem[1], embora relativamente às primeiras tenha também recorrido com frequência ao material audio-registado, quer para confirmação do texto escrito, quer para rememoração do ambiente da entrevista e do discurso oral, por vezes indispensável para a compreensão da transcrição. Empreguei este procedimento nos trechos que considerava relevantes para traduzir o pensamento do professor em questão sobre determinado assunto — reflexões, juízos ou opiniões — e com ele adquiria maior confiança na fidelidade do texto escrito e maior convicção relativa à interpretação que dele realizava.

Para o desenvolvimento de todo o processo analítico estabeci três fases distintas, cada uma delas com incidência e intenções específicas. Na primeira fase[2],

desvalorizando ou omitindo outros, tendo também, como elas, funções "retóricas" e "comprovativas" (*evidentiary*) (p. 150).

[1] Erickson (1986) considera que o conjunto dos materiais recolhidos no campo — notas de campo, material documental, gravações e mesmo as transcrições de entrevistas — não constituem os dados (*data*) da investigação mas recursos documentais "a partir dos quais os dados devem ser construídos através de um processo formal de análise" (p. 149). Na presente investigação, a análise começou por incidir nos textos integrais das transcrições, das notas de campo e dos registos de aula, de onde resultou a selecção das "unidades básicas" (p. 149) sobre as quais a análise de dados, no seu desenvolvimento, se centrou e se foi aprofundando. Importa dizer que a própria elaboração dos registos de aula constituiu um momento da análise prévio, integrado no processo de redução de dados de que Miles e Huberman (1984) falam, processo de redução que progride durante toda a análise e culmina com as redacção das conclusões.

[2] Trata-se, podemos dizer, da "apresentação dos dados" que Miles e Huberman (1984) referem, embora para tal não tenha recorrido às modalidades que estes autores sugerem para essa apresentação — "figuras descritivas" e "matrizes descritivas" e "explicativas" (pp. 25-

cada um dos participantes é estudado isoladamente com o propósito principal de dar corpo a uma descrição detalhada do caso desse participante, evidenciando e caracterizando os principais traços das suas concepções sobre a Matemática e a actividade matemática, enquadrados por um relato do seu percurso escolar e profissional com pendor narrativo. Nesta fase, a análise recai directamente nos dados e é estruturada pelas três grandes categorias temáticas da investigação comuns aos matemáticos e às professoras — "O percurso escolar e profissional", "A Matemática", "A actividade matemática" — e por duas outras, "O ensino da Matemática", apenas para os matemáticos e "A aulas de Matemática", apenas para as professoras. A análise, a partir de certa altura concomitante com o processo de escrita, e aprofundada por ele, desenvolveu-se num processo em que interagiam elementos teóricos previamente definidos e elementos empíricos relativos aos dados recolhidos, procurando fazer emergir, com esta interacção, os mais relevantes para a compreensão e descrição do caso de cada participante. Em algumas situações, estes elementos eram concordantes com categorias teóricas prévias ou enquadravam-se nelas, mas em outras situações deram origem à formulação de outras categorias e subcategorias, por vezes diferentes de participante para participante, não previamente estabelecidas (anexo 6). Deste processo resultou, para cada participante, um 'retrato' escrito que é estruturado pelos grandes temas atrás mencionados mas cujo conteúdo, relativo a cada um desses temas, é determinado e organizado pelas categorias e subcategorias que relevaram da análise dos dados.

Para a análise nesta primeira fase, comecei pelas entrevistas com duas leituras integrais do texto das transcrições e diversas leituras parcelares incidindo sobre os trechos entretanto seleccionados, relativos a um determinado tema ou questão, seguindo-se, no caso das professoras, os registos de aula e das notas de campo. Com a primeira leitura das transcrições procedi a uma análise pouco estruturada, orientada pelas questões da investigação, com a qual visava identificar e assinalar no texto as falas, frases, expressões ou palavras que considerava relevantes para cada uma dessas questões. Durante esta leitura, realizei as

---

26), optando antes por um texto do tipo narrativo que considerei mais adequado ao estudo que pretendia realizar. Esta fase é também penetrada por uma redução e transformação dos dados no sentido em que na apresentação dos dados existe "selecção", "resumo ou paráfrase" dos dados ou a sua "inclusão numa metáfora ou padrão mais amplo", formas que a redução qualitativa de dados pode assumir (Miles e Huberman, 1984, p. 24).

primeiras anotações analíticas e interpretativas que prosseguiram nas leituras subsequentes incidindo em aspectos cada vez mas detalhados. As anotações eram registadas a lápis nas margens do texto, expressamente deixadas em branco para este efeito, e utilizei marcadores coloridos e etiquetas autocolantes para assinalar e destacar os trechos que considerava relevantes para o prosseguimento da análise e as categorias analíticas respectivas[1].

À análise das transcrições seguiu-se, com o mesmo procedimento, a análise dos registos de aula das professoras e das notas de campo relativas às entrevistas pós-aula. Todo este processo conduziu à identificação das unidades básicas de análise (Erickson, 1986) e à sua selecção e agrupamento, de acordo com categorias mais amplas do estudo e com as subcategorias que se evidenciaram na análise ou que emergiram dela. Estas unidades básicas, no meu estudo, são de dois tipos: trechos das entrevistas e trechos dos registos de aula, que correspondem, respectivamente, aos "exemplos de comentários" e aos "exemplos de acção" mencionados por Erickson[2]. Os primeiros foram escolhidos com base na análise das entrevistas e os segundos obtidos a partir da análise dos registos de aula e das notas de campo. Uma vez identificados e seleccionados, os trechos referidos não foram retirados do texto integral da entrevista ou registo de aula. Deste modo, as leituras sucessivas desses trechos foram sempre feitas no contexto respectivo e favoreceram uma visão global do conteúdo do texto integral, bem como a detecção de outros exemplos de evidência, confirmando ou infirmando interpretações já realizadas, ou de questões ainda não abordadas[3].

A primeira fase da análise começou com uma das professoras e só iniciei o estudo da outra professora quando concluí o relato relativo à primeira. Todo o

[1] No anexo 8 apresento a primeira página de uma transcição anotada.

[2] Erickson (1986), referindo-se ao processo de indução analítica, considera dois tipos de unidades básicas de análise: os "exemplos de acção (*instances of action*) nos acontecimentos que têm lugar entre pessoas" e os "exemplos de comentários (*instances of comments*) sobre a significância dessas acções vulgares e sobre aspectos mais amplos das concepções (*beliefs*) e dos significados na perspectiva dos vários actores envolvidos [nesses] acontecimentos" (p. 149).

[3] Relativamente à possibilidade de utilização do computador neste trabalho de pesquisa analítica Erickson (1986) inclina-se para a leitura "à mão", "página à página" do material empírico recolhido, considerando que tal leitura "proporciona ao investigador uma concepção mais holística do conteúdo das notas de campo (...) e oportunidade para encontrar evidência contraditória não esperada e questões adjacentes (*side issues*) não antecipadas que podem ser estudadas em leituras subsequentes" (p. 149).

trabalho analítico e interpretativo realizado para o primeiro caso, e que o trabalho de escrita obrigou a aprofundar, influenciou, deliberadamente, o estudo que se seguiu da outra professora. Este, por sua vez, e reciprocamente, levou a um retorno ao primeiro caso, quer para reformular, completar, ou desenvolver a descrição analítica relativa a itens comuns, quer para introduzir novos itens que a análise do segundo caso mostrou serem também relevantes para o primeiro. Esta fase da análise, como até agora foi descrita, corresponde, para cada um dos casos, à "descrição particular" (*particular description*) de Erickson (1986), descrição detalhada apresentando exemplos extraídos dos dados[1] que este autor considera como "o núcleo essencial" do relatório de uma investigação com base em trabalho de campo, sem a qual as asserções interpretativas do investigador ficariam sem evidência e justificação, restando ao leitor apenas "fazer fé" nessas asserções (p. 149). Erickson refere-se também a um outro tipo de descrição a que chama "descrição geral"[2] (*generical description*) e ainda ao "comentário interpretativo" (*interpretive commentary*) como um terceiro tipo de conteúdo do relatório de uma investigação utilizado para "ajudar o leitor a estabelecer conexões entre os detalhes apresentados [na descrição particular] e os argumentos mais abstractos" (p. 149) que correspondem às asserções interpretativas realizadas. Dos três tipos de "comentários interpretativos" que Erickson apresenta[3], o que utilizei mais frequentemente nesta fase da análise tem a forma de interpretações que, em certos casos, precedem as citações de entrevistas ou os episódios narrativos de uma de aula, ou vêm imediatamente a seguir. Comentários deste tipo têm por objectivo orientar a leitura, de forma a evidenciar os detalhes, em meu entender, mais importantes, bem como as interpretações que realizo com base nessas citações ou episódios (Erickson, 1986).

---

[1] Estes exemplos, consistem em citações directas das entrevistas, ou das notas de campo, e em episódios narrativos extraídos dos registos de aula, as primeiras com a indicação expressa da sua localização na entrevista respectiva (número da entrevista e da página de onde foram extraídas) e os segundos referindo a data da aula a que dizem respeito.

[2] Este tipo de descrição, tal como o autor a preconiza (nomeadamente, recorrendo a tabelas de frequências simples), não foi utilizada neste estudo por não se lhe adequar, embora o objectivo de síntese e identificação de regularidades que lhe é atribuído tenha, naturalmente, também norteado a análise aqui efectuada.

[3] Erickson (1986) descreve ainda dois outros tipos de comentários interpretativos: um, como sendo a "discussão teórica que faz salientar a importância mais geral das regularidades identificadas nos acontecimentos relatados", e outro, a "explicação das mudanças que ocorreram no ponto de vista do autor no decurso da investigação" (p. 152).

A segunda fase analítica ocorreu após a elaboração dos relatos das professoras, resultantes da análise efectuada na primeira fase e incidiu, precisamente, sobre esses relatos. O seu propósito principal era confrontar os dois casos numa discussão em que procuro salientar elementos de homogeneidade e de heterogeneidade no que diz respeito às suas concepções sobre a Matemática e sobre a actividade matemática e também no que se refere aos seus percursos escolares e profissionais. Os casos das professoras e os casos dos matemáticos foram tratados em separado. Estes últimos só foram iniciados depois de concluídos os casos das professoras e a respectiva discussão. Com este tratamento separado, procurei criar condições para o referido confronto entre as duas professoras, por um lado, e os dois matemáticos, por outro, minimizando uma eventual contaminação que não pretendia, nem na primeira, nem na segunda fase de análise.

A análise nesta fase foi, como na primeira, orientada pelas questões mais amplas desta investigação e resultou numa discussão dos casos dos participantes dois a dois, em que procuro destacar aspectos comuns, convergências ou semelhanças, bem como singularidades, divergências ou contrastes. Para tal, construí uma tabela para cada par de casos, contendo os trechos extraídos da descrição dos casos respectivos que considerei relevantes para a sua discussão. Esta informação era inserida na tabela de acordo com as categorias e subcategorias que estruturaram a descrição dos casos. Da análise destas tabelas, fequentemente acompanhada pela leitura ou releitura de trechos das entrevistas e dos próprios casos resultaram os itens que estruturaram e deram corpo à discussão pretendida na segunda fase da análise. Cada uma das discussões constitui, por assim dizer, uma espécie de 'conclusões intermédias', correspondendo a um trabalho de síntese mais notório e intenso do que na primeira fase.

A terceira fase da análise incidiu sobre as discussões que resultaram da segunda fase, embora tenha recorrido, com alguma frequência, às descrições dos casos individuais e também aos dados 'em primeira mão' (trechos das entrevistas e dos registos de aula). O seu propósito era confrontar as análises já realizadas, em particular as da segunda fase, num esforço de síntese mais acentuado e visando a formulação de asserções interpretativas mais abrangentes[1]. Esta última

[1] Neste processo, segui um procedimento análogo ao da fase anterior, confrontando, entre todos os participantes, as análises já realizadas. Este confronto foi apoiado numa selecção de trechos destas análises, agrupados de acordo com itens ou subcategorias que até aí se tinham revelado pertinentes.

fase analítica foi igualmente orientada pelas questões mais amplas do estudo, desta vez cruzando professoras e matemáticos e integrando elementos da literatura teórica e empírica sobre as temáticas desta investigação. Deste trabalho emergiram os itens que estruturam as conclusões relativas a cada uma das questões sob investigação e que são apresentadas em três pontos — "A relação com a Matemática e a escolha profissional", "A relação com a profissão" e "Concepções sobre a Matemática e a actividade matemática".

III — O conhecimento do professor

As concepções e as crenças

Concepções: um instrumento do pensar

Concepção é, na verdade, um termo difícil de definir e cujo significado nos escapa com facilidade. Em linguagem corrente, quando perguntamos a alguém qual é a sua concepção disto ou daquilo, o que, de um modo geral, queremos saber é o que a pessoa pensa sobre determinada coisa, que entendimento tem dessa coisa, qual é a forma como ela a vê ou encara. No fundo, o que pretendemos com aquela pergunta, é saber o que essa coisa é para a pessoa em causa, como aparece — no sentido de como se mostra — a coisa na pessoa; ou seja, de que modo ela a concebeu, qual a elaboração mental que realizou. À noção de concepção, podemos associar um sentido de construção ou criação de algo[1], num acto onde concorrem elementos interiores (da pessoa) e elementos exteriores[2] (da coisa). Este acto de conceber, cujo culminar pode ser visto como uma

[1] Conceber: desenvolver em si o gérmen de; gerar; imaginar; inventar (J. Almeida Costa e A. Sampaio e Melo (1994). *Dicionário da língua portuguesa* (7ª ed.). Lisboa: Porto Editora.

[2] Em rigor, nem sempre se tratará de um exterior psicológico pois quando o pensamento se debruça sobre si próprio, ou quando incide sobre objectos ideais, o objecto é interior ao sujeito que pensa e não deixa de lhe ser transcendente, transcendência entendida no sentido gnoseológico que Nicolaï Hartmann (1945) lhe dá: "a oposição entre o sujeito e o objecto não pode ser suprimida [ainda que] não se trate, necessariamente, de uma oposição no tempo e no espaço; um objecto ideal (uma proposição matemática, por exemplo), ou ainda mais, alguma coisa de

espécie de 'dar à luz', é no entanto sempre interior, significando este 'dar à luz' que a concepção ficou disponível para os 'olhos' (do pensamento) da pessoa.

Num sentido amplo, concepção pode designar "todo o acto do pensamento que se aplica a um objecto" (Lallande, 1976, p. 161), ou o resultado desse acto, entendido assim como "a simples visão que temos das coisas que se apresentam ao nosso espírito" (P. -Royal, em Lallande, 1976, p. 161). Hannah Arendt (1992), considerando o pensamento como uma das actividades de base do espírito, apoia-se na distinção kantiana entre razão e intelecto, para distinguir pensamento de conhecimento ou saber. Citando o próprio Kant, diz:

> "A faculdade de pensar que Kant, como vimos, chama *Vernunft* (razão) para a distinguir do intelecto (*Verstand*) ou faculdade de conhecer, é de natureza completamente diferente. O que as separa (...) prende-se com o facto de que 'os conceitos racionais servem para compreender e os conceitos intelectuais servem para entender[1] (as percepções)'. Por outras palavras, o intelecto quer captar aquilo que é dado aos sentidos, enquanto que a razão deseja compreender o seu *significado* (em itálico no original)." (p. 74)

O pensamento é pois apresentado como a actividade própria da razão e o saber como a actividade própria do intelecto. Estas duas actividades mentais correspondem assim a duas faculdades diferentes do espírito, cujas finalidades são também distintas: com o intelecto, "órgão do saber e do conhecimento" (p. 78), o espírito procura o conhecimento, visa entender, "captar" (*saisir*) o que se lhe apresenta, o que é dado aos sentidos; com a razão, visa a sua compreensão, procura o seu significado. O conhecimento, vocação do intelecto, orienta-se pela verdade, entendida como aquilo que "se situa no testemunho dos sentidos"[2] (p. 75); a razão, pela procura de significação: "[a faculdade de pensar]

---

puramente subjectivo (como uma opinião ou um sentimento), uma vez que se tornem objecto em relação ao sujeito que conhece, opõem-se necessariamente ao sujeito enquanto tal e nessa medida são transcendentes" (pp. 91-92).

[1] Com "entender" (*entendre*) a autora pretende, julgo, salientar a dimensão receptiva do intelecto uma vez que a palavra francesa possui também o sentido de ouvir e perceber.

[2] Esta acepção de verdade como uma evidência irrecusável — "A verdade é o que a natureza dos seus sentidos e do seu cérebro *obriga* o homem a admitir" (p. 79, itálico meu) — não implica no entanto, em Arendt, uma noção absoluta e imutável de verdade: "O saber (*savoir*) tem certamente por fim a verdade, mesmo se esta verdade, como nas ciências, nunca é durável, mas parcial e provisória, e que nos esforcemos por substituí-la por outras, mais exactas, à medida que o saber progride" (p. 79).

não pergunta o que é uma coisa ou se ela existe (...) mas o que significa ela existir" (p. 75).

Mas, se significado e verdade são coisas diferentes — "a exigência da razão não é inspirada pela pesquisa da verdade mas pela pesquisa do significado; e, verdade e significado não são uma única e a mesma coisa" (p. 30) — isso não significa, no entanto, para Hannah Arendt, que as actividades do espírito não estejam relacionadas[1]. Para conhecer, diz-nos Arendt, servimo-nos do pensamento e a razão, num certo sentido, "representa a condição *a priori* do intelecto e do conhecimento" (p. 79): sem o pensamento, sem esse "apetite de significado", como lhe chama, não seríamos capazes de conhecer.

Também para John Dewey (1991), é a procura de significado que norteia o nosso pensamento. "Pensamos para captar significados (*grasp meaning*)", asserção que, no entanto, este autor aplica igualmente ao acto de conhecer: "todo o conhecimento, toda a ciência, visa assim captar o significado dos objectos e acontecimentos" (p. 117).

Quando em *How we think*[2], Dewey analisa o modo como pensamos, apresenta quatro modalidades de pensamento. Duas delas, as formas de pensar mais elementares, correspondem a pensamentos que aceitamos sem que tenhamos necessidade de algum tipo de fundamento. Consistem na simples consciência que temos de alguma coisa, real ou imaginária, ou na evocação mental que fazemos das coisas que não temos em nossa presença. As outras duas correspondem a formas de pensar mais elaboradas, em que já exigimos algum tipo de fundamento para que aquilo em que pensamos nos mereça crédito. Nuns casos, esse fundamento não é questionado nem examinado, e os pensamentos que elaboramos são aceites numa base de que não temos consciência, como diz Dewey, por tradição, instrução ou imitação: tais pensamentos "provindo de origens obscuras e por canais desconhecidos, insinuam-se para aceitação e, sem que tenhamos consciência, passam a fazer parte do nosso equipamento mental" (p. 4). Noutros casos, para fazermos crédito no que pensamos, procuramos deliberadamente examinar o seu fundamento. É a forma a que Dewey chama de pensamento

[1] "Ao distinguir verdade e significado, saber e pensamento", diz Arendt, "não tenho a intenção (...) de negar o facto de que o pensamento, na procura do significado, e o saber, na procura da verdade, estão ligados" (p. 79).

[2] Dewey (1991).

reflexivo e a que se refere como um "esforço consciente e voluntário para fundar aquilo em que acreditamos numa base firme de razões" (p. 6).

John Dewey associa fortemente a ideia de concepção (*conception*), que também designa por noção, com a ideia de significado (*meaning*), considerando que qualquer "significado padrão" (*standard meaning*) ou "qualquer significado suficientemente individualizado para ser directamente captado e prontamente utilizado, e assim fixado por uma palavra, é uma concepção" (p. 125). No entanto, recusa a ideia de que as concepções sejam uma espécie de significado residual, ou um mínimo significado comum a vários objectos ou situações, que se vai constituindo no confronto da pessoa com esses objectos ou situações. A sua elaboração, segundo este autor, supõe uma atitude activa do sujeito, uma espécie de expectativa que repousa em experiências anteriores que o levam a antecipar determinada interpretação do objecto ou situação com que se depara. Esta interpretação é confrontada com a experiência, e é "à medida que este processo de pressuposição e experimentação é realizado e refutado pelos resultados [que] as suas concepções ganham corpo e clareza" (p. 129).

Neste processo, diz-nos Dewey, as concepções constituem-se como "ideias gerais", ou seja como ideias que podem ser utilizadas em diversas situações e esse seu carácter de generalidade advém-lhes, não daquilo que as constitui, mas da sua utilização — "as concepções são gerais devido ao seu uso e aplicação e não devido aos seus ingredientes" (p. 129). Constituída uma concepção, ela servirá para compreensões futuras e a sua generalidade decorre do facto de poder ser aplicada a novas situações: "uma colecção de aspectos obtidos como resíduo comum (...) de um milhão de objectos, será uma mera colecção, inventário ou agregado, não uma *ideia geral* (itálico do autor); um aspecto saliente que se evidenciou na experiência de uma pessoa [e] que depois ajuda a compreender uma outra experiência, tornar-se-á muito geral, em virtude desse serviço de aplicação" (p. 129).

Ainda segundo Dewey, concepção é um significado que adquiriu alguma estabilidade, isto é, que se conserva, mesmo perante mudanças nas pessoas ou nas condições físicas: "a experiência sensorial, as condições físicas e psicológicas variam, mas o significado mantém-se" (p. 125). Nesta acepção, concepção — entendida como significado bem delimitado e estável — tem um sentido restrito, muito próximo do conceito, o que não implica, no entanto, que esse sentido seja fixo e imutável. O pensamento utiliza as concepções para interpretar o mundo, e essa utilização serve igualmente, como Dewey também chama a atenção, quer para as corrigir ou aperfeiçoar, quer para alargar o seu significado.

Da estabilidade com que as concepções são estabelecidas decorre a sua importância que Dewey caracteriza por uma tripla qualidade instrumental, quando as apresenta como instrumentos de "identificação" (*identification*), de "suplementação" (*suplementation*) e de "sistematização" (*placing in a system*). Enquanto instrumentos de identificação, as concepções possibilitam-nos distinguir, por exemplo, um objecto de outros objectos e reconhecê-lo como membro de uma determinada classe de objectos. Uma vez realizada a identificação, as concepções, como instrumentos de suplementação, permitem que todo o património conceptual de que dispomos possa ser aplicado sobre esse objecto e que lhe atribuamos as qualidades dos objectos da classe a que pertence, mesmo que ainda não observadas. Por fim, como instrumentos de sistematização, as concepções permitem inserir o objecto identificado num sistema global de relações e de interacções com outros objectos.

Poderemos pois dizer que o pensamento como actividade da razão, no sentido kantiano que Arendt (1992) lhe dá, ou, no sentido de Dewey (1991), englobando o conhecimento, visa a procura do significado das coisas, dos objectos, de tudo aquilo com que o nosso espírito se confronta. Os significados que elaboramos e que adquirem alguma estabilidade constituem as nossas concepções, o instrumento de que o pensamento se socorre para interpretar o mundo e que neste processo se corrigem e aperfeiçoam.

Concepção e crença

Em estudos da literatura anglo-saxónica que podemos considerar pioneiros na área do pensamento e conhecimento do professor, particularmente no que se refere à educação matemática, os conceitos de concepção (*conception*) e de crença (*belief*) aparecem frequentemente associados. É o caso, por exemplo, do estudo que Alba Thompson realizou no princípio dos anos 80 sobre as concepções dos professores (Thompson, 1982) e dos trabalhos de Catherine Brown e de Thomas Cooney (Brown, Brown, Cooney e Smith, 1982; Brown e Cooney, 1982) bem como o de outras investigações que se seguiram na mesma área, como as de Reuben Kesler (1985) e Edwin Owens (1987). Outros investigadores usam o conceito de crença em vez do conceito de concepção, em alguns casos considerando mesmo os dois conceitos como equivalentes. Brown e Cooney (1982), por exemplo, identificam os sistemas de concepções com o conjunto das crenças que os professores possuem sobre a Matemática e sobre o seu ensino: "os sistemas conceptuais dos professores, *isto é*, as suas crenças sobre o ensino, a Matemática e como os alunos aprendem" (p. 14, itálico meu).

Nos trabalhos de investigação referidos, é a noção de crença que se reveste de maior visibilidade e que é utilizada com maior frequência. O mesmo acontece nos trabalhos de A. Schoenfeld (1983), T. Cooney (1983, 1985), H. Munby (1984), C. Marcelo (1987), P. Ernest (1989) e P. Peterson (1989), onde não surge o conceito de concepção e é ao conceito de crença que é dado o papel principal. Esta utilização preferencial da noção de crença está também presente numa revisão sobre a investigação desenvolvida na área do pensamento do professor realizada em 1986, onde Clark e Peterson estabelecem as "teorias e *crenças*" (itálico meu) como uma das três categorias que usam para o estudo dos processos de pensamento do professor (Clark e Peterson, 1986). Em 1988, numa outra revisão, desta vez incidindo apenas sobre a investigação no campo da educação matemática, Doug Jones, manifesta a mesma preferência, visível logo no título do seu trabalho: "Uma revisão de uma selecção de investigação relacionada com a relevância das *crenças* dos professores de Matemática na formação de professores e na prática de ensino" (Jones, 1988, itálico meu).

Em Portugal, no que se refere à educação matemática, a investigação que se insere na área do pensamento do professor começou na segunda metade dos anos oitenta sob a influência do estudo de Alba Thompson (1982), tendo trabalhado essencialmente com o conceito de concepção (Abrantes, 1986; Guimarães, 1988). No seu desenvolvimento no princípio dos anos noventa, a investigação portuguesa prosseguiu na mesma linha, incidindo quer sobre concepções gerais dos professores sobre a Matemática e o seu ensino (Canavarro, 1993; Rodrigues, 1993), quer sobre concepções relativas a aspectos mais específicos, como a resolução de problemas (Oliveira, 1993; Fonseca, 1995; Vale, 1993), a utilização de tecnologia (Azevedo, 1993), a comunicação na sala de aula (Meneses, 1995) e a avaliação da aprendizagem (Martins, 1996). Um estudo realizado sensivelmente no mesmo período por Ana Boavida (1993), partindo das ideias de autores como Durkheim, sobre representações individuais e representações colectivas, e Moscovici, sobre representações sociais, utiliza no entanto o conceito de representação em vez do conceito de concepção. A intenção terá sido dar maior ênfase às dimensões afectivas e sociais do conhecimento — "as representações pessoais sobre a Matemática englobam elementos dos domínios cognitivo, afectivo e social (...)" (p. 188) — no pressuposto de que ao conceito de concepção está sobretudo associada a dimensão cognitiva[1].

No trabalho que realizou em 1982, Alba Thompson define as concepções dos professores de Matemática como o objecto central da sua investigação, assumindo que essas concepções são constituídas pelas crenças, pontos de vista e conceitos dos professores sobre a Matemática e sobre o ensino da Matemática[2]. Esta autora considera que os sistemas conceptuais podem ser descritos como "organizações complexas de crenças, descrenças e conceitos" (p. 11) e assume que, no seu estudo, o termo concepção é utilizado, precisamente, "para englobar, quer o conjunto das crenças, quer o conjunto das descrenças (...) e incluir os conceitos desenvolvidos [pelo professor] sobre o assunto [a Matemática] e o seu ensino" (p. 12). Nesta acepção, concepção é tida como um conceito mais amplo e mais geral do que o conceito de crença, sendo o seu significado definido com base neste e em outros conceitos[3]. É a perspectiva que a mesma autora mantém, cerca de dez anos depois do seu primeiro estudo, quando afirma numa importante revisão que realizou da investigação sobre concepções:

> "Para além da noção de sistema de crenças, este capítulo referir-se-á às 'concepções' dos professores encaradas como uma estrutura mental mais geral, englobando crenças, significados, conceitos, pro-

[1] A partir de meados dos anos noventa começa a tomar corpo, em Portugal, uma outra linha de investigação na área do conhecimento do professor que trabalha essenciamente com o conceito de conhecimento profissional (Guimarães, 1996; Ponte, 1993, 1994).

[2] Alba Thompson (1982) apresenta como um dos propósitos do seu estudo: "identificar os principais conceitos, pontos de vista e crenças (*concepts, views, and beliefs*) que constituem as concepções dos professores" (p. 2). No final do estudo, Thompson usa também a ideia de "preferência" (*preference*) para descrever extensivamente a noção de concepção: "existe uma forte razão para acreditar que, em Matemática, as concepções dos professores (as suas crenças, pontos de vista e preferências) (...)" (p. 261).

[3] O que também acontece em áreas que não a do ensino da Matemática: Frank Pajares (1992) no seu estudo sobre crenças, refere investigação das ciências físicas que também utiliza o termo concepção num sentido mais alargado do que o de crença, englobando, entre outras noções, "crenças metafísicas", "metáforas", "analogias" e "conceitos" (p. 320).

posições, regras, imagens mentais, preferências e [noções] semelhantes". (Thompson, 1992, p. 130)

Crença e conhecimento

Alba Thompson (1982, 1992) considera concepção como um conceito mais amplo que o conceito de crença mas, no seu estudo de 1982, é essencialmente sobre o conceito de crença que elabora, recorrendo, para isso, a autores de fora da área da educação matemática que estudaram os processos do pensamento e do conhecimento do ponto de vista psicológico e epistemológico (Rokeach, 1960; Scheffler, 1965; Neisser, 1976). É com base nestes autores que Thompson se refere aos conjuntos de crenças, como constituindo, pela função de mediação que realizam entre a pessoa e o mundo, as "configurações anticipadoras" (*anticipatory schemata*) que já referi, as quais, actuando como expectativas, predispõem e orientam a pessoa face às situações com que se confronta. Crença é assim definida como um "estado teorético" (*theorethical state*) que caracteriza o modo como uma pessoa se orienta no mundo, como uma "expectativa" (*expectancy*) ou "predisposição" (*predisposition*) dessa pessoa para a acção, face ao que se lhe apresenta ao seu espírito.

Rokeach (1968) considera que uma crença, conforme o seu conteúdo, pode ser considerada como "descritiva ou existencial" (*descriptive or existencial*), "avaliativa" (*evaluative*), ou "prescritiva ou exortatória" (*prescriptive ou exhortatory*). Uma crença é descritiva, se aquilo que afirma é algo que pode ser considerado verdadeiro (ou falso) — "o sol nasce a oriente", é o exemplo que o autor dá de uma crença deste tipo; é avaliativa, se consiste num juízo de valor sobre alguma coisa, como acontece, por exemplo, quando nos referimos à qualidade de algum produto; e, prescritiva, se exprime ou afirma como conveniente um determinado tipo de actuação ou comportamento — "é desejável que os filhos obedeçam aos pais", dá-nos como exemplo o autor, para este último caso. Qualquer que seja o seu conteúdo, diz-nos Rokeach, as crenças orientam a pessoa na sua relação com o mundo, predispondo-a para agir: "todas as crenças são predisposições para a acção" (p. 113).

Apesar dos esforços de clarificação, o conceito de crença tem sido considerado insuficientemente esclarecido na investigação e um dos motivos apresentados para essas insuficiências é a dificuldade em distinguir crença de conhecimento (Pajares, 1992; Thompson, 1992). Recorrendo a uma análise de cariz filosófico (Fontaine, 1998; Lallande, 1976), o termo crença (*croyance*, *belief*) designa, no seu significado mais geral e vulgar, "uma atitude mental de aceitação ou assentimento" perante proposições que são tidas como verdadeiras, constituindo "uma presunção ou pretensão de verdade" sobre essas proposições, cujo grau de certeza é apresentado como podendo variar, desde o da simples opinião, até ao que corresponde ao conhecimento científico (Fontaine, 1998, pp. 522-523). Na análise kantiana a que Fontaine recorre, crença é apresentada como a relação entre o valor subjectivo e o valor objectivo do juízo sobre uma proposição, podendo assumir três graus, opinião, fé e ciência. Estes graus são definidos do seguinte modo, citando o próprio Kant: "Opinião é uma crença que tem consciência de ser insuficiente tanto subjectiva como objectivamente; se a crença só é subjectivamente suficiente e, simultaneamente, é tida como objectivamente insuficiente, chama-se fé; por fim, a crença suficiente, tanto do ponto de vista subjectivo como do ponto de vista objectivo, chama-se ciência" (p. 523).

Nesta hierarquia de tipos de crenças, podemos entrever algumas das distinções mais frequentemente estabelecidas entre crenças e conhecimento, e que se relacionam, precisamente, com o grau de certeza com que são mantidos. Em Thompson (1992), as crenças e o conhecimento são apresentados como sendo habitualmente distinguidos segundo duas dimensões, o grau de convicção e o grau de consensualidade com que são estabelecidos. A convicção implica primeiramente a pessoa (podemos dizer que se refere ao grau de certeza subjectivo), a consensualidade implica o confronto com outros (neste caso podemos dizer que está em jogo o grau de certeza objectivo).

Segundo a primeira destas dimensões, o que distingue as crenças do conhecimento é que podemos possuir crenças com diferentes graus de convicção — significando apenas que acreditamos mais profundamente numas coisas do que em outras — enquanto que o conhecimento não admite variabilidade em convicção. Ou seja, dizemos que conhecemos um facto, um acontecimento, uma situação, muito ou pouco, completa ou incompletamente, mas não dizemos que o conhecemos com muita ou com pouca convicção.

Na segunda dimensão, o que distingue as crenças do conhecimento é que as crenças não são consensuais, no sentido de que admitimos que diferentes pessoas poderão ter crenças diferentes a propósito de um mesmo assunto, enquanto que o conhecimento exige consensualidade. Também Jan Nespor (1987), estudando a estrutura dos sistemas de crenças, inclui o seu carácter não consensual (*non-consensuality*) entre as características que apresenta como podendo servir para distinguir crenças de conhecimento. Para Nespor, esta não consensualidade das crenças provém da ausência de acordo no modo de as avaliar, enquanto que para o conhecimento, que se constitui e evolui "de acordo com cânones de argumentação relativamente bem estabelecidos", há um consenso sobre a forma como ele pode ser avaliado. Esta é a razão pela qual o autor considera que as crenças constituem sistemas mais "estáticos" ou "menos maleáveis" que os sistemas de conhecimento e portanto mais difíceis de mudar. "Quando as crenças mudam", diz-nos este autor, "é mais provável tratar-se de uma conversão ou de uma mudança *gestalt* do que o resultado de uma argumentação ou de uma determinação da evidência" (p. 321). A distinção entre crenças e conhecimento, ainda a este respeito, é igualmente retomada por Frank Pajares (1992) quando afirma que as crenças são "pela sua própria natureza contestáveis" e alarga este seu carácter ao conjunto das crenças numa mesma pessoa, considerando que as crenças individuais "nem mesmo exigem consistência interna" (p. 311), isto é, podemos possuir crenças que conflituam entre si ou que são até contraditórias.

Esta última distinção entre as crenças e o conhecimento, significa, como diz Thompson (1992), associar ao conhecimento, a certeza ou a verdade, e à crença, a contestabilidade. Esta associação corresponde a considerar que o conhecimento obriga a um "acordo geral sobre os procedimentos para avaliar e ajuizar da sua validade, devendo preencher critérios que envolvem cânones de evidência, [e que] as crenças, pelo seu lado, (...) não preenchem esses critérios, sendo assim caracterizadas por ausência de acordo na forma como são avaliadas ou julgadas" (p. 130). Thompson, no entanto, relativiza os conceitos de crença e conhecimento, alertando para a possibilidade de as regras, "os cânones de evidência", como lhe chamou, com os quais o conhecimento é confrontado para ser aceite como tal, mudarem, e, com essa evolução, uma crença poder vir a adquirir o estatuto de conhecimento ou inversamente.

Uma outra dimensão segundo a qual as crenças e o conhecimento são também frequentemente distinguidos, e onde se têm também evidenciado diferentes posições, é a que podemos designar pela dimensão do afectivo-cognitivo. Algumas perspectivas consideram a afectividade e a cognição independentes uma da outra e, por isso, separaram completamente, nesta dimensão, crenças e conhecimento. As crenças são colocadas num dos pólos, sendo-lhes atribuída uma carga essencialmente afectiva, e o conhecimento no pólo oposto, com uma carga essencialmente cognitiva. Com base em estudos da psicologia cognitiva e das ciências da cognição, Nespor (1987), por exemplo, apresenta a afectividade como uma das características que distinguem as crenças do conhecimento[1]. Para este autor, independentemente do elevado grau de interacção que existe entre os sistemas de conhecimento e os sistemas de crenças, o conhecimento que temos de determinado assunto pode ser conceptualmente distinguido dos nossos sentimentos em relação a esse assunto. "Os sistemas de crenças", diz-nos, "dependem de muma maneira muito mais forte de componentes afectivas e avaliativas do que os sistemas de conhecimento" (p. 319).

Uma outra tendência que sustenta a separação entre crenças e conhecimento, embora com ligeiras diferenças em relação à anterior, corresponde à ideia de "conhecimento genérico" (*generic knowledge*) que Pajares (1992) refere como incluindo as duas componentes: a afectiva, relativa às crenças, e a cognitiva, correspondendo ao conhecimento. Nesta linha, podemos também inserir a posição de Paul Ernest (1989) que no modelo que propõe para distinguir conhecimento, crenças e atitudes, considera o conhecimento, como a "saída cognitiva" (*cognitive outcome*) desse pensamento, e as crenças e atitudes, como a "saída afectiva" (*affective outcome*). A posição deste autor, no entanto, não é tão extrema, uma vez que assume que nas crenças existe também uma componente cognitiva que, por razões de economia do modelo que apresenta, não tem em conta: "por simplicidade, a escassa, mas significativa, parte cognitiva das crenças é ignorada" (p. 30).

Nesta última posição, existe já alguma relativização na distinção entre crenças e conhecimento, no que respeita à sua carga afectiva e cognitiva. Frank Pajares (1992) vai mais longe nessa relativização, afirmando não só que as crenças têm uma componente cognitiva, como também o conhecimento tem uma componente afectiva. "A concepção do conhecimento", diz o autor, "como algo mais puro do que a crença e mais próximo da verdade ou falsidade

[1] Particularmente em Abelson (1979).

de uma coisa, exige um postura mecanicista difícil de digerir" (p. 310). Também António Damásio (1995), na sua obra a propósito da clássica distinção entre corpo e mente, afectividade e racionalidade, sublinha as dificuldades que esta separação levanta e o papel que as emoções desempenham no pensamento racional considerando, por exemplo, que sem a intervenção destas o pensamento lógico, pelo menos em certas situações, tem dificuldade em operar, nomeadamente para tomar decisões.

Existe, assim, dificuldade em conseguir uma distinção clara entre crenças e conhecimento. Frank Pajares (1992), recorrendo a fontes da Psicologia e estudos cognitivos (Rokeach, 1976; Nisbet, 1980; Lewis, 1990) chama a atenção para esta dificuldade — "não há maneira de fugir à natureza entrelaçada das crenças e do conhecimento" (p. 313) — afirmando que há inclusivamente perspectivas que sustentam que todo o conhecimento tem a sua raiz em crenças. Entre esses autores, uns consideram o conhecimento um conceito mais amplo do que o conceito de crença, incluindo-as no conhecimento, outros, pelo contrário, vêm nas crenças um conceito mais abrangente do que o conhecimento. Para Rokeach (1976), por exemplo, "qualquer crença considerada isoladamente, uma vez que representa uma predisposição para responder de um modo preferencial ao objecto da crença, pode ser vista como possuindo, quer uma componente afectiva, quer uma componente cognitiva" (p. 115). Para este autor, cada crença, isolada ou inserida num conjunto de crenças determinado, possui elementos afectivos, responsáveis pelos aspectos emocionais, e elementos cognitivos que representam o conhecimento. Rokeach propõe ainda uma terceira componente a que chama "componente comportamental" (*behavioral*), uma vez que, concebida como uma predisposição para agir, considera que a crença conduz "a algum tipo de acção, se convenientemente activada" (p. 114).

Referindo-se ao conhecimento, Fenstermacher (1994) distingue, do ponto de vista da epistemologia, dois tipos principais que identifica como conhecimento proposicional (*propositional knowledge*) e conhecimento comportamental (*performance knowledge*), cotejando-os, respectivamente, com as noções de conhecimento formal e de conhecimento prático na análise que faz da investigação sobre o conhecimento dos professores (veja-se a secção mais adiante sobre o conhecimento prático). Trata-se, no fundo, da mesma categorização que Pajares (1992) vai buscar a outros autores — "conhecimento declarativo" (*declarative knowledge*) e "conhecimento de procedimento" (*procedural knowledge*) — a que acrescenta uma terceira categoria — "conhecimento condicional"[1] (*conditional knowledge*) — que descreve relacionando-a com o tipo de conhecimento "que envolve a compreensão do quando, porquê e sob que condições o conhecimento declarativo e de procedimento devem ser usados" (p. 312). Também a respeito destas categorizações, é difícil distinguir crenças de conhecimento. Mesmo o conhecimento declarativo ou proposicional, eventualmente o tipo de conhecimento que melhor se distinguiria de crença, supõe sempre acreditarmos, como o autor também sublinha, numa forma de autoridade, ou numa evidência, seja ela lógica ou sensorial. Conhecemos porque acreditamos no nosso equipamento intelectual e nos nossos orgãos dos sentidos.

Para além das dimensões já referidas, utilizadas para distinguir crenças de conhecimento, Nespor (1987) diferencia ainda estes dois conceitos em outras características, nomeadamente, considerando que, relativamente à forma como são guardadas na memória, as crenças possuem uma "estrutura episódica" (*episodic structure*), enquanto que o conhecimento possui uma estrutura semântica. Recorrendo a Abelson (1979), diz concretamente: "a informação nos sistemas de conhecimento está armazenada essencialmente em redes semânticas, enquanto que os sistemas de crenças são constituídos sobretudo por material armazenado como 'episódios' (*'episodically'-stored material*), proveniente da experiência pessoal ou de fontes culturais ou institucionais de transmissão de conhecimento" (p. 310). Ou seja, as crenças que possuímos guardamo-las associadas a episódios que vivemos em experiências passadas[2]. Estes episódios permanecem na memória muitas vezes sob a forma de imagens, como nos exemplos que Frank Pajares (1992) apresenta de estudos de investigação que evidenciam o carácter episódico das crenças[3].

---

[1] Poder-se-á fazer um paralelo entre este tipo de conhecimento e a "componente comportamental" das crenças descrita no parágrafo anterior.

[2] Nespor (1987) refere que a distinção aqui em questão entre crenças e conhecimento é ainda controversa e que existem "modelos episódicos" também para o conhecimento (p. 320).

[3] Estes estudos, segundo Pajares (1992), referem-se a "imagens orientadoras" (*guiding images*) e "imagens fotográficas" (*photographic images*) que os professores possuem e evocam, por exemplo, relativamente ao seu passado como alunos e que desempenham um papel importante, como é dito, na elaboração do conhecimento por parte do professor (p. 310).

Os sistemas de crenças

Dada a enorme quantidade de crenças que, indiscutivelmente, todos nós possuímos, é impensável, como Rokeach (1976) refere, que essas crenças sejam mantidas no nosso espírito sem qualquer tipo de organização. As crenças que uma pessoa possui, como sugere o autor referido, deverão estar organizadas em agrupamentos de acordo com determinadas propriedades estruturais. Estes agrupamentos, com maior ou menor comunicação ou relação entre si, constituem subsistemas e sistemas de crenças — noções que alguns autores identificam com a de sistema conceptual (Brown, Brown, Cooney e Smith, 1982; Brown e Cooney, 1982) — e podem ser caracterizados por essas propriedades. Uma caracterização como essa descreve a estrutura dos sistemas de crenças, isto é, a forma como as crenças estão organizadas na pessoa. Ou seja ainda, refere-se, não ao em que acreditamos mas ao modo como acreditamos.

Alba Thompson (1982), com as referências teóricas já mencionadas, apresenta um conjunto de propriedades dos sistemas de crenças segundo quatro dimensões: "abertura-fechamento" (*open-closed*), "isolamento" (*isolation*), "diferenciação" (*differentiation*) e "abrangência" (*compreensiveness*). Na primeira dimensão, o sistema de crenças poderá ser mais aberto ou mais fechado, conforme a sua maior ou menor permeabilidade a influências exteriores. A segunda dimensão refere-se ao grau de interrelação das crenças na pessoa. Existirá isolamento num sistema de crenças quando, por exemplo, coexistem crenças contraditórias nesse sistema. Por sua vez, a diferenciação dá uma indicação da "riqueza de detalhe" dos sistemas de crenças que serão mais ou menos diferenciados, conforme o conhecimento que a pessoa possui sobre as suas crenças (conseguindo ou não saber o que há de diferente nelas). Por fim, a abrangência de um sistema de crenças é determinada, diz-nos Thompson citando Rokeach (1960), pelo "número e alcance de subsistemas de descrenças representados num dado sistema de crenças e descrenças" (p. 14).

Num trabalho mais recente, Thompson (1992), recorrendo a outras fontes (Green, 1971), prossegue a caracterização estrutural dos sistemas de crenças, referindo-se a três outras dimensões. Na primeira dimensão que descreve, as crenças caracterizam-se pelo modo como estão relacionadas umas com as outras, em termos de uma hierarquia de precedência lógica. Assim, haverá crenças "primárias" e crenças "derivadas", a que as primeiras dão origem. É o que Thompson chama "estrutura quase-lógica" dos sistemas de crenças.

A segunda dimensão estabelece uma espécie de topologia psicológica das crenças, de acordo com o grau de convicção com que as possuímos. Nesta dimensão é possível distinguir entre crenças "centrais" e crenças "periféricas", as primeiras psicologicamente mais firmemente estabelecidas do que as segundas e por isso mais dificilmente modificáveis. Trata-se da dimensão "central-periférico" que Rokeach (1976) propõe na análise que faz da organização dos sistemas de crenças e do modo como eles se modificam. Este autor considera que "nem todas as crenças têm a mesma importância para a pessoa" e que "quanto mais central for a crença mais resistirá à mudança" (p. 3); a eventual modificação de uma crença terá tanto mais consequências no conjunto do sistema quanto mais central ela for.

A centralidade, ou importância psicológica de uma crença, é definida em termos das relações que tem com outras crenças no sistema: quanto mais relações uma crença tiver mais central é (Rokeach, 1976). Se uma crença tem relações com muitas crenças, qualquer mudança sua vai ter consequências em todas as crenças com que está relacionada e, por isso, mais difícil é modificá-la. Pode, portanto, dizer-se que, quanto maior a centralidade da crença, maior a sua estabilidade. A precedência lógica e a centralidade psicológica são dimensões "ortogonais", ou seja, uma crença pode ser caracterizada numa e noutra dimensão de forma independente: pode ser primária e periférica (ou central) ou derivada e central (ou periférica) (Thompson, 1992).

A terceira dimensão refere-se à ocorrência de crenças em "agrupamentos" (*clusters*) mais ou menos isolados na pessoa, o que, como nos diz Thompson (1992), "impede (...) o confronto entre eles e torna possível a existência de conjuntos de crenças conflituantes" (p. 130). Por isso se pode dizer que as crenças "nem mesmo exigem consistência interna", para retomar aqui a referência anterior, a propósito da distinção entre crenças e conhecimento.

Conforme o modo como se agrupam e organizam, e a forma como tendem a influenciar a pessoa face a um objecto ou situação, certos autores distinguem entre dois conjuntos de crenças: as atitudes e os valores. Uma atitude, para Rokeach (1976), é "uma organização de crenças relativamente duradoura em torno de um objecto ou situação, predispondo uma pessoa para responder de um modo preferencial [a esse objecto ou situação]" (p. 112). Os valores, para o mesmo autor, são tipos de crenças muito centrais, isto é, fortemente enraizadas na pessoa e que orientam, do ponto de vista avaliativo, o seu comportamento. São crenças sobre uma espécie de "estado final da existência que vale ou não a pena atingir (...), ideais abstractos, positivos ou negativos, (...) representando as crenças da pessoa sobre modos ideais de conduta e sobre objectivos últimos ideais" (p. 124). Pajares (1992) retoma esta distinção entre atitudes e valores considerando que os valores "abrigam as funções avaliativas, comparativas e de juízo das crenças e transformam a predisposição [para a acção] num imperativo para a acção" (p. 314). As crenças, atitudes e valores constituem, no seu conjunto, o sistema de crenças da pessoa.

Constituição e mudança das concepções e das crenças

As concepções e crenças constituem-se ao longo da vida das pessoas, no seu contacto com o mundo e na interacção social, sendo incorporadas através de um processo por vezes denominado de transmissão cultural. Este processo é descrito por alguns autores como tendo três componentes, a "inculturação" (*inculturation*), a "educação" (*education*) e a "instrução" (*schooling*) (Van Fleet, 1979, em Pajares, 1992). A primeira componente corresponde a um processo de aprendizagem não orientado, em que as pessoas, na sua relação com tudo o que as cerca, aprendem essencialmente "através da observação, participação e imitação individuais" (p. 316); a segunda componente, a educação, é, pelo contrário, um processo intencional e orientado, visando uma aprendizagem adequada às normas culturais vigentes; a instrução, por último, é o processo de ensino propriamente dito, portanto também intencional e orientado, que ocorre em instituições específicas.

Brown e Cooney (1982), recorrendo às mesmas fontes, transpõem este processo de transmissão cultural para a formação de professores, para explicar o modo como eles adquirem as suas crenças em relação ao ensino. A inculturação propicia a aquisição de crenças durante toda a escolaridade a que o futuro professor está sujeito, na medida em que se vai confrontando com as matérias disciplinares, com os ambientes escolares, com os diferentes professores. A educação, por sua vez, é vista como o processo de formação que visa adequar o desempenho do professor às normas da cultura escolar, incluindo neste processo a interacção com outros professores e a prática real de aulas. A instrução consiste no processo de formação que decorre em instituições específicas de formação de professores. Todos estes processos contribuem para a criação e estabelecimento de crenças nos professores, sobre a disciplina que leccionam, sobre os alunos e a escola, sobre a profissão, o ensino e a aprendizagem.

De um modo geral, as crenças adquiridas tendem a perdurar, embora existam umas mais susceptíveis de mudança do que outras, como foi referido na discussão sobre a centralidade psicológica das crenças. Teóricos da cognição, diz-nos Pajares (1992), consideram que as crenças mais recentemente adquiridas são as mais facilmente modificáveis, sendo as mais antigas aquelas que mais dificilmente sofrem alterações. Com o tempo, as crenças fortalecem-se, estabelecem mais relações no sistemas de crenças e tornam-se mais centrais, o que conduz, segundo o autor referido, a que as pessoas possam muitas vezes não mudar as suas crenças, mesmo quando confrontadas com algo que as contraria ou põe em causa: "há evidência substancial para sugerir que as crenças persistem, mesmo quando já não são representações exactas da realidade" (p. 317). Ou seja, uma vez estabelecidas, como o mesmo autor também diz, as crenças tendem de certa forma a "autoperpetuar-se", o que não significa que não sofram qualquer mudança na pessoa ao longo da sua vida.

Alba Thompson (1992), por exemplo, considera que os sistemas de crenças evoluem com a avaliação que as pessoas fazem das suas crenças no confronto com a experiência, embora também reconheça que "é muito difícil para os professores adaptarem os seus esquemas e interiorizarem ideias novas" (p. 140) e que a investigação sobre o processo de mudança das crenças ainda não explicou, suficientemente, a razão por que isso acontece. Thompson, no entanto, distancia-se da ideia de que os sistemas de crenças são "entidades estáticas" e de que a relação entre as crenças e a prática é de simples causalidade. Segundo esta autora, a investigação sobre a relação entre as crenças e a prática sugere que os sistemas de crenças são "estruturas mentais dinâmicas permeáveis susceptíveis de mudança com a experiência", e que a sua relação com a prática é uma "relação dialéctica e não uma simples relação de causa e efeito" (p. 140).

O processo de mudança agora sugerido evoca as ideias piagetianas a propósito dos processos de aquisição e desenvolvimento do conhecimento. Pajares (1992) refere estudos que usam os conceitos de assimilação e de acomodação para descrever o processo de mudança conceptual, explicando-os do seguinte modo: a assimilação corresponde apenas à incorporação de nova informação nas crenças que a pessoa já possui; a acomodação acontece quando a nova informação não pode ser assimilada, obrigando à substituição de crenças ou à sua reorganização. Em qualquer dos casos existirá mudança de crenças, embora a acomodação corresponda a uma modificação mais profunda. Esta modificação, no entanto, é difícil e, segundo o mesmo autor, uma substituição de crenças só acontece quando as que possuímos são postas em causa e não somos capazes de uma adaptação no nosso sistema de crenças.

Referindo-se às crenças mais recentes na pessoa, Pajares (1992) afirma que se essas crenças não forem testadas pelo próprio na sua prática, para verificar da sua eficácia, podem vir a ser abandonadas. Este autor apresenta inclusivamente um exemplo onde terá existido uma mudança significativa nos professores, mas apenas depois de terem verificado que os alunos tiveram sucesso com determinada proposta, constação que conduziu à conclusão de que "a mudança nas crenças segue, em vez de preceder, a mudança no comportamento" (p. 321). Assim, se as crenças influenciam o comportamento, parece também acontecer que o comportamento influencia as crenças. Esta situação reforça a ideia de que a relação entre crenças e prática deve ser vista como uma relação de mútua influência. Ou, como diz Dewey (1991) referindo-se às concepções:

> "Dizer que o pensamento usa e expande as nossas concepções e noções é então apenas dizer que quando realizamos inferências ou fazemos juízos utilizamos significados e que esta utilização também corrige e alarga esses significados." (p. 125)

Em síntese

O estudo das concepções do professor sobre o ensino e a aprendizagem, e sobre a disciplina que lecciona, constitui uma área de investigação ainda relativamente recente mas que podemos considerar em franca expansão. Referindo-se ao estudo das crenças dos professores de Matemática, Thompson (1992), por exemplo, é de opinião de que "o seu potencial para dar contribuições no campo [da cognição do professor] tem vindo a ser amplamente reconhecido na educação matemática" (p. 131).

Nesta área de investigação, no que se refere às noções de crença e de conhecimento, alguns investigadores, devido à proximidade conceptual destas noções, não vêem utilidade em fazer a sua distinção. Por sua vez, as noções de crença e concepção têm sido usadas muitas vezes com sentidos quase equivalentes, outras vezes com sentidos diferentes, atribuindo-se, neste caso, a concepção, um sentido amplo, englobando o conceito de crença como Thompson (1992) propõe, ou seja:

> "[Como] estruturas mentais englobando simultaneamente crenças e qualquer aspecto do conhecimento do professor que diga respeito à experiência do professor, tal como significados, conceitos, proposições, regras, imagens mentais." (p. 141)

Ao conceito de crença, como vimos, é tendencialmente associada uma carga afectiva, e com a utilização do conceito de concepção, na acepção ampla atrás referida, contemplam-se as dimensões cognitivas e afectivas que a simples utilização do conceito de crença poderia esconder.

Os sistemas conceptuais, entendidos como conjuntos de concepções de uma pessoa, constituem-se por processos individuais e de interacção social. As concepções estabelecem-se como esquemas mentais que, uma vez formados, desempenham um papel fundamental na compreensão que as pessoas desenvolvem do mundo e de si próprias. Enquanto instrumentos do pensamento, ajudam no conhecimento e na atribuição de significado a tudo o que nos cerca. Estruturam e dão sentido às situações com que a pessoa se confronta e orientam-na face a essas situações, influenciando a sua predisposição ou o seu comportamento em relação a elas, bem como a acção que vier a realizar. Pela sua própria natureza e origem, as concepções são estabelecidas com diferentes graus de convicção e possuem conexões diferentes nos sistemas conceptuais o que faz com que existam concepções mais facilmente modificáveis do que outras. É reconhecido, nomeadamente, que quanto mais cedo se constituem, mais estáveis se tornam e mais difícil é a sua modificação. Todavia, tem sido igualmente reconhecido que esses sistemas não são estáticos e que, com a experiência, podem sofrer modificações mais ou menos profundas.

Um dos pressupostos principais sobre o qual assenta a investigação realizada na área do pensamento do professor e, em particular, no que diz respeito às suas concepções, é que as concepções que o professor possui influenciam fortemente a prática que desenvolve, embora a natureza dessa influência não seja completamente conhecida. Referindo-se às concepções muito ligadas a um determinado saber, por exemplo à Matemática, Michèle Artigue (1989) considera-as como um "utensílio" (*outil*) de que o professor se socorre quer para a análise desse saber e criação de situações de ensino e aprendizagem para utilizar com os seus alunos, quer para analisar o comportamento desses alunos face àquilo que lhes é proposto. Daí o dizer-se que conhecer e compreender essas concepções será essencial para compreender a actuação dos professores e também para poder intervir no sentido da melhoria da sua formação e da sua prática pedagógica.

O conhecimento prático dos professores

A crítica ao modelo da racionalidade técnica

Ser professor é uma profissão. Na sua profissão, o professor exerce um certo tipo de actividade, desenvolve uma prática a que muitas vezes nos referimos como 'prática lectiva' ou 'prática pedagógica' e que consiste no ensino de uma ou mais disciplinas. Não é de hoje, nem se verifica apenas no nosso país, mas sentimo-lo cada vez mais: como profissional o professor não está muito bem visto. Os resultados educativos, sobretudo na sua face mais visível — as elevadas taxas de reprovação e o desinvestimento e desinteresse dos alunos nas actividades escolares — são alimento do descrédito crescente em relação ao professor. Há um sentimento mais ou menos generalizado de que educação escolar está desadequada e que não satisfaz muitas das expectativas sociais actuais, sendo a responsabilidade principal desta situação atribuída aos professores e à Escola.

O sentimento de descrença em relação ao professor já não é recente e Donald Schön (1991) vai ao ponto de generalizar este descrédito a todas a profissões, falando em "crise de confiança" e "crise de legitimidade", querendo com isto significar uma espécie de "crescente cepticismo relativamente à benfeitoria e utilidade prática do conhecimento profissional e de um progressivo desacordo em conceder às profissões a autonomia, a autoridade e o controlo que habitualmente gozavam" (Schön, 1992, p. 119). Para este autor, a crise a que se refere é gerada por uma concepção do conhecimento profissional como aplicação instrumental do conhecimento científico e técnico aos problemas da prática. É o "modelo da racionalidade técnica" para o conhecimento profissional, concepção epistemológica que o autor insere na corrente positivista nascida no século XIX, afirmando mesmo que a "racionalidade técnica é a epistemologia positivista da prática" (Schön, 1991, p. 31).

Segundo esta visão, "a actividade profissional consiste na resolução de problemas instrumental (*instrumental problem solving*), tornada rigorosa pela aplicação da teoria e técnicas científicas" (p. 21) e, assim, uma profissão é, acima de tudo, um veículo para aplicação dos conhecimentos científicos disponíveis à resolução dos problemas que essa profissão enfrenta. Em particular, deste ponto de vista, um professor é sobretudo um técnico que será considerado competente se aplicar de forma adequada o conhecimento produzido pela investigação científica (na matéria que ensina) ou educacional (didáctica, psicológica, pedagógica). Nas universidades produz-se (organiza-se, sistematiza-se, legitima-se) os conhecimentos científicos que as profissões devem aplicar, e a prática profissional consistirá na aplicação dos saberes (científicos, técnicos) aprendidos. Formar um profissional é, assim, ensinar-lhe os saberes científicos e técnicos considerados necessários à sua profissão que, numa perspectiva de ciência aplicada, terá que utilizar para resolver os problemas da sua prática.

Esta perspectiva, como Donald Schön (1991) salienta, veio a mostrar-se redutora e incompleta. Apesar do desenvolvimento científico e tecnológico das últimas décadas, muitos dos graves problemas sociais não foram resolvidos, tendo surgido novos problemas cuja origem se associa muitas vezes ao próprio desenvolvimento científico. Na análise que faz, Schön considera que esta situação contribuiu para a crise de confiança e cepticismo referidos e, para explicar esta crise, convoca razões de vária ordem, no centro das quais coloca a desadequação do conhecimento profissional e dos processos de formação, face à prática a que supostamente se referem. O modelo da racionalidade técnica, diz-nos, não se adequa às situações da prática com que nos deparamos, uma vez que elas não se apresentam como problemas claramente definidos para serem solucionados, mas como "situações problemáticas caracterizadas pela incerteza, desordem e indeterminação" (p. 16).

As situações da prática profissional não são simples, estáticas, estruturadas ou uniformes mas, pelo contrário, como Schön (1991) sublinha, são situações de elevada complexidade, de carácter único, instáveis e em que existem conflitos. É este tipo de situações que o profissional defronta (muito evidentes em educação) e para as quais a formação tradicional — que poderíamos traduzir de forma simples por *aprender para aplicar* — é inadequada. A ciência e a técnica não contêm todas as respostas às questões e problemas que a prática levanta e existem elementos essenciais no conhecimento profissional que só se manifestam e desenvolvem na prática. Desta análise decorre a proposta de uma epistemologia da prática que, ao contrário da racionalidade técnica, reconheça e integre elementos dessa prática. "Se o modelo da racionalidade técnica é incompleto na medida em que não contempla as competências práticas que situações 'divergentes' exigem", diz Schön, "procuremos, em seu lugar, uma epistemologia da prática implícita nos processos intuitivos e artísticos que alguns profissionais desenvolvem em situações de incerteza, instabilidade, singularidade e de conflito de valores" (p. 49). Atribui-se assim à prática, um valor epistemológico considerando-a como fonte de conhecimento profissional, o que equivale a reconhecer, nesse conhecimento, uma componente que os profissionais adquirem e desenvolvem em situações dessa prática.

A noção de conhecimento prático

Analisando a investigação sobre os professores, Gary Fenstermacher (1994) confronta dois tipos de conhecimento: o conhecimento formal e o conhecimento prático. O primeiro, é apresentado como o conhecimento obtido com o recurso aos "métodos científicos convencionais, quantitativos ou qualitativos, (...) pretendendo proporcionar graus de significância, validade, generalização e intersubjectividade comummente aceites" (p. 8). Associando o conhecimento formal à ciência convencional, o autor diz que é esta a concepção de conhecimento que está na base da "abordagem de orientação científica" (*science-oriented approach*) e considera-o como "uma modificação do que é conhecido como uma explicação padrão (*standard*), ou baseada em crenças verdadeiras justificadas (*justified true belief*), do conhecimento humano" (p. 8).

Para caracterizar melhor o conhecimento formal, Fenstermacher, recorrendo à epistemologia, relaciona-o com o conceito de conhecimento proposicional, muitas vezes referido, diz-nos, como conhecimento teórico ou científico, e associado à noção grega de *epistèmè*, significando "o conhecimento do mundo que pode ser estabelecido com um nível de confiança muito elevado" (p. 21), e cujo paradigma, é o conhecimento científico. O conhecimento formal é apresentado com fortes relações com os métodos de investigação científica e associado a níveis significância, validade, generalização determinados, sendo exigido que "seja justificado de tal modo que ultrapasse o contexto, situação, ou período de tempo imediatos" (p. 28).

O segundo tipo de conhecimento — o conhecimento prático — é-nos descrito por Fenstermacher como um conhecimento inerente às situações da prática, que se desenvolve a partir das acções que as pessoas realizam e da reflexão que fazem sobre elas. Para o autor, este tipo de conhecimento, ao contrário do conhecimento formal, tem um carácter situacional e contextual, é de natureza experiencial, e é um conhecimento não necessariamente explícito. Trata-se, segundo as suas próprias palavras, de um conhecimento que é "circunscrito à situação ou contexto onde nasce e pode ou não ser susceptível de expressão, escrita ou oral, imediata; (...) [que] se relaciona geralmente com o saber fazer as coisas, com o saber o lugar e tempo certos para as fazer, e com o ser capaz de ver e interpretar acontecimentos relacionados com as acções que realizamos" (p. 12).

Fenstermacher, recorrendo também à epistemologia, confronta o conhecimento prático com o "conhecimento de desempenho" (*performance knowledge*), expressão usada englobando noções como "saber fazer" (*knowing how*), "conhecimento de técnicas" (*skill knowledge*) e "desempenho competente" (*competent performance*). Esse tipo de conhecimento é associado à noção grega de *techné* — no sentido de habilidade, de saber como fazer alguma coisa — associação que no entanto "não significa sugerir que se esteja a lidar apenas com uma forma de saber fazer (*know-how*)" (p. 25). Rejeita assim a dicotomia "saber-saber fazer" (*knowin that-knowing how*), considerando que, embora tratando-se de saberes distintos, eles são "interdependentes": "não podemos optar pelo conhecimento de desempenho sem também compreender que, no processo, 'adquirimos' conhecimento proposicional e vice-versa" (p. 27).

Tal como procedeu na comparação entre o conhecimento formal e o proposicional, Fenstermacher distingue o conhecimento prático do conhecimento de desempenho (*performance knowledge*), na forma como os epistemólogos o entendem. Considera o primeiro um "conceito mais amplo e mais inclusivo" (p. 28), englobando outras noções como o "conhecimento estratégico" (*estrategical knowledge*, Schulman, 1986) e a ideia de "sabedoria prudencial" (*prudencial wisdom*, atribuída a Jonsem e Toulmin) que cita como exemplos. Referindo-se aos professores, Fenstermacher diz que, no ensino, o conhecimento prático é "mais do que *technè*, mais do que saber fazer, é um conceito colectivo relativo à vida mental dos professores, aos seus pensamentos, reflexões, propósitos, planos, desejos" (p. 36), incluindo ainda a ideia de experiência vivida que vai buscar a John Dewey. É precisamente este tipo de conhecimento que tem vindo a ocupar lugar de relevo no estudo do conhecimento do professor e sobre o qual têm vindo a desenvolver-se cada vez mais estudos (Clandinin, 1986; Elbaz, 1983; Fenstermacher, 1994; Munby e Russel, 1992; Schön, 1991).

O "conhecimento-na-acção" e a "reflexão-na-acção" de D. Schön

Segundo Donald Schön (1991), o "conhecimento-na-acção" (*knowing-in-action*), é o saber que os profissionais manifestam na prática quando executam (bem, competentemente) uma determinada acção. Como a expressão indica, é um saber *na* acção e este *na* tem um duplo sentido de inclusão e simultaneidade. Isto é, por um lado, é um saber incorporado na acção, é um saber que "está *na* nossa acção" (p. 49). Por outro lado, é um saber que se manifesta durante a acção, enquanto ela decorre. É, assim, inseparável da acção e, em determinados casos, também inseparável dos objectos com os quais agimos. De algum modo, como também refere Schön, é o que o senso comum chama de "saber-fazer" (*know-how*, p. 50). Este tipo de conhecimento é descrito do seguinte modo:

— é tendencialmente tácito (implícito): ou seja, é dificilmente verbalizável ou de difícil descrição; sabemos fazer uma coisa e não conseguimos dizer o que sabemos para (se ser capaz de) fazer essa coisa;

— tem carácter de espontaneidade: não precisamos de pensar para o usar, nem enquanto o usamos (tem muitas vezes carácter quase automático);

— surge-nos como intuitivo: empregamo-lo sem que muitas vezes tenhamos consciência de o termos aprendido (Schön, 1991, 1992).

Para Donald Schön (1991) o conhecimento-na-acção, entendido desta maneira, é o "modo característico do conhecimento prático comum" (p. 54). Um outro modo de conhecimento prático que este autor apresenta e discute é o que chama "reflexão-na-acção" (*reflection-in-action*). Tal como o primeiro, também a reflexão-na-acção é uma modalidade de conhecimento inerente à própria acção, ou seja, inseparável da prática onde se constitui e revela. É um movimento do pensamento que ocorre na acção, enquanto a acção se processa. Não se trata no entanto, como o autor salienta, do "parar-para-pensar"[1] que a palavra reflexão pode sugerir, mas do pensar sobre o que se está a fazer, enquanto se faz. É uma reflexão que ocorre durante a acção, sem que esta tenha que ser interrompida, e que não obriga ao emprego de palavras.

A reflexão-na-acção pode ser verbal ou não verbal, isto é, pode verificar-se no seio de interacções verbais ou não. Pode ocorrer em situações em que não há palavras, e os exemplos que Schön (1992) nos dá referem-se à actuação do jogador de basquetebol a reagir em resposta à manobra de algum adversário e à do pianista que improvisa em resposta ao som de outro instrumento, situações em que o autor considera que os executantes "pensam no que estão fazendo enquanto o fazem" (p. 125), mesmo sem existirem palavras. Noutras situações, a reflexão ocorre no seio de uma interacção verbal, como no diálogo entre duas pessoas que reagem às interpelações de uma à outra, ou como no caso do professor que procura perceber as reacções dos alunos no momento em que acontecem, e actuar em conformidade com o entendimento que fez. Referindo-se aos professores, (Schön, 1992) dá-nos o exemplo de uma situação de reflexão-na-acção que a seguir transcrevo.

[1] Schön (1992) refere Hannah Arendt, distinguindo a noção de parar-para-pensar (*stop-and-think*) desta autora, do seu conceito de reflexão-na acção. A noção de Arendt é descrita como uma "pausa durante a qual pensamos retrospectivamente sobre o que fizemos, raciocinando verbalmente", enquanto que a reflexão-na-acção "ocorre em plena acção", durante o que desigana por *action-present* sem que, necessariamente se tenham que usar palavras (p. 125).

> "Existe, primeiramente, um momento de surpresa: um professor reflexivo permite-se ser surpreendido pelo que o aluno faz. Num segundo momento, reflecte sobre esse facto, ou seja, pensa sobre aquilo que o aluno disse ou fez e, simultaneamente, procura compreender a razão porque foi surpreendido. Depois, num terceiro momento, reformula o problema suscitado pela situação (...). Num quarto momento, efectua uma experiência para testar a sua nova hipótese, por exemplo, coloca uma nova questão ou estabelece uma nova tarefa." (p. 83)

Analisando esta situação podemos distinguir alguns momentos na actuação do professor, que esquematicamente podem ser expressos na sequência:

surpresa - interpretação - reformulação - experimentação

Na verdade, há, em primeiro lugar, a intervenção de um aluno que surpreende o professor. Em seguida, o professor procura compreender o que terá estado na origem dessa intervenção e por que razão se terá surpreendido. Reformula depois a situação de acordo com o entendimento que fez e, por fim, procura averiguar a adequação da interpretação realizada. Num caso como este, tudo se passa como se a pessoa desencadeasse uma "conversa com a situação" (*conversation with the situation*), ideia que Donald Schön (1992, p. 125) introduz, fazendo notar o sentido metafórico com que o termo conversa é usado, uma vez que se trata de uma conversa *com* a situação e não *sobre* a situação (e que, para ocorrer, como vimos, pode não exigir sequer palavras). Deste modo, é reforçada a interacção entre o sujeito e a situação, o movimento de vaivém entre eles como elemento essencial da reflexão-na-acção. Na nossa actuação provocamos transformações na situação e o entendimento que fazemos da 'resposta' da situação, leva-nos a modificar a nossa actuação. 'Conversamos com a situação com que nos defrontamos e, como numa conversa, 'ouvimos' a situação, o que nos permite modificar o nosso entendimento a seu respeito e nossa forma de actuar.

A reflexão-na-acção é pois um processo que possibilita a reformulação da nossa compreensão durante a própria acção. Este processo de reflexão-na-acção não é necessariamente rápido pois, estando circunscrito ao momento em que a acção ocorre, pode ser, conforme os casos, de minutos ou horas, dias, semanas ou meses: "o ritmo e duração de episódios de reflexão-na-acção variam com o ritmo e duração das situações da prática" (Schön, 1991, p. 62).

Donald Schön propõe ainda um outro tipo de reflexão — "reflexão-sobre-a-acção" (*reflection-on-action*) — que ocorre, não durante a acção, mas depois dela. É a situação em que o pensamento incide *a posteriori* sobre a acção, reconstruindo-a mentalmente ou com a utilização de registos, e em que a pessoa reflecte sobre a sua actuação, agora usando palavras ou descrições verbais. Podemos dizer que este tipo de reflexão pressupõe a sequência:

acção/observação - reconstrução (da acção) - reformulação

Trata-se de um processo já não de reflexão *na* prática, mas de reflexão *sobre* a prática, que incide sobre o conhecimento-na-acção e sobre a reflexão-na-acção[1] (Schön, 1992). Este reflectir sobre a reflexão-na-acção[2] que Schön (1992) considera simultaneamente como "uma acção, observação e descrição [exigindo] o uso de palavras" (p. 83), e que, segundo alguns autores, é um processo que favorece o desenvolvimento do professor e o ajuda a "construir a sua forma pessoal de conhecer" (Alarcão, 1991, p. 9), representa um outro nível de reflexão, descrito do seguinte modo, no caso do professor:

> "É possível olhar retrospectivamente e reflectir sobre a reflexão-na-acção. Após a aula, o professor pode pensar no que aconteceu, no que observou, no significado que lhe deu e na eventual adopção de outros sentidos". (Schön, 1992, p. 82)

No seu conjunto, o "conhecimento-na-acção", a "reflexão-na-acção" e a "reflexão-sobre-a-acção" constituem as modalidades de conhecimento prático na perspectiva de Donald Schön, modalidades estas que não são independentes mas que se interligam e completam. Este conhecimento é identificado por Angel

[1] Regressando a Hannah Arendt, Schön identifica este outro processo de reflexão com a ideia de *stop-and-think* de Arendt: "aqui, o pensamento volta-se sobre si próprio, quer sobre o conhecimento-na-acção revelado por um padrão de comportamento, quer sobre a reflexão-na-accção que reformula a nossa compreensão em plena acção" (Schön, 1992, p. 126).
[2] Angel Pérez (1992), socorrendo-se de Habermas, designa este processo reflexivo, a par com a reflexão-sobre-a-acção, por "reflexão crítica", considerando-o, como o processo pelo qual o indivíduo analisa "as características e processos da sua própria acção" (p. 105), fazendo notar que seria mais adequado utilizar outro tipo de terminologia: "reflexão sobre a representação ou reconstrução *a posteriori* da acção" (p. 105).

Gomez (1992) com a "capacidade para manejar a complexidade [das situações da prática] e resolver os problemas práticos através da integração inteligente e criativa do conhecimento e da técnica" (p. 102).

O conhecimento prático em Freema Elbaz

Num trabalho iniciado em 1976 e que se prolongou durante dois anos, Freema Elbaz (1983) estudou em profundidade uma professora sob uma perspectiva em que o professor é visto como "um agente" com um papel "activo e autónomo" na sua prática e, segundo a qual, essa prática "modela" o papel que o professor assume. Com o propósito de "ilustrar e conceptualizar" esse papel, dando ênfase particular ao "conhecimento que a professora possui e que usa no seu trabalho" (p. 4), procurou investigar o que designou por conhecimento prático, logo no título do livro que publicou[1], e que descreve assim:

> "Este conhecimento engloba experiência em primeira mão dos estilos de aprendizagem dos alunos, [dos seus] interesses, necessidades, capacidades e dificuldades, e um repertório de técnicas de ensino e de competências para a gestão da aula. O professor conhece a estrutura social da escola e o que ela exige (...), bem como a comunidade a que a escola pertence e tem uma sensibilidade daquilo que será ou não aceite por ela". (p. 5)

Freema Elbaz atribui assim ao conhecimento prático um carácter experiencial e um conteúdo que abarca aspectos relacionados com os alunos e a aprendizagem, com o professor e o ensino e com o contexto escolar e social. É um tipo de conhecimento que o professor adquire e desenvolve com a sua experiência, mas que Elbaz relaciona com conhecimentos de outra natureza, proporcionados pelas áreas científicas da disciplina de leccionação e de domínios como a aprendizagem, a Psicologia e a Sociologia, e a que chama conhecimento teórico[2]. "Este conhecimento experiencial", diz a autora referindo-se ao conhecimento prático, "é informado pelo conhecimento teórico do professor" (p. 5). É interessante o paralelo com Fenstermacher (1994) quando este, distanciando-se de uma posição que vê a ciência como fundamento do ensino, considera que "ensinar é

[1] *Teacher thinking, a study of practical knowledge* (Elbaz, 1983).
[2] Podemos evocar aqui o "conhecimento formal" ou o "conhecimento proposicional" que Fenstermacher (1994) analisou.

uma prática informada e auxiliada pela ciência convencional, [mas] não tem por base [essa ciência]" (p. 43). Para Elbaz, todos estes tipos de conhecimento, experienciais e teóricos, "tal como são integrados pela pessoa do professor, em termos de crenças e valores pessoais, e na medida em que são orientados para a sua situação prática" (p. 5), constituem o conhecimento prático do professor, atribuindo-lhe assim, para além da natureza experiencial já referida, um carácter pessoal e situado ou contextual.

Frema Elbaz justifica a escolha da expressão "conhecimento prático" por um lado, por esta expressão chamar a atenção para o facto de a situação em que o professor se insere ser uma situação de acção e de tomada de decisões e, por outro lado, por considerar que o conceito que lhe está subjacente explica o conhecimento do professor "em função da sua resposta a essa situação" (p. 5). Existe nesta justificação uma valorização da prática, da acção do professor, como fonte do conhecimento do professor e local privilegiado onde esse conhecimento se revela. Segundo esta perspectiva, poderemos compreender o conhecimento do professor se analisarmos a sua prática, embora essa análise só em parte explique esse conhecimento. A razão de ser do 'em parte' referido tem a ver com conhecimentos do professor de outra natureza, como se torna claro no exemplo fornecido para uma professora de História:

> "O seu conhecimento pode ser estabelecido parcialmente de acordo com a teoria particular da História que ela adopta, parcialmente em termos da organização imposta pelo livro de texto preferido e parcialmente em termos da experiência que tem de aspectos como os tópicos que os alunos acham mais relevantes e interessantes." (p. 5)

São claros, nesta descrição do conhecimento da professora, elementos de natureza experiencial (os interesses dos alunos), elementos de natureza teórica, relacionados com a disciplina leccionada, e elementos de carácter 'misto', relacionados com a escolha do livro de texto, uma vez que podemos ver esta escolha orientada por conhecimentos teóricos e experienciais. Este exemplo dá uma ideia de como o conhecimento do professor é informado por conhecimentos de natureza diversa, cuja integração é realizada pela pessoa do professor de acordo com as suas concepções sobre a disciplina que lecciona e preferências (em relação ao livro de texto), e tendo em conta o conhecimento dos alunos (proveniente da sua prática).

Conteúdo, orientações e estrutura do conhecimento prático. Na conceptualização que faz do conhecimento prático, Freema Elbaz (1983) centra-se em três aspectos. Em primeiro lugar, analisa o seu *conteúdo*, pressupondo que o conhecimento prático é sobre alguma coisa e não apenas, como diz, um "conhecimento de como fazer coisas" (p. 14). Recusa, portanto, uma visão do conhecimento prático como um simples saber-fazer — recusa já evidenciada em Fenstermacher (1994) (ver p. 70) — e sublinha a importância em reconhecer um conteúdo nesse tipo de conhecimento dos professores:

> "Sinto que é importante reconhecer que os professores possuem realmente um conhecimento de conteúdo — conhecimento proposicional sobre o estado das coisas, crenças, e coisas semelhantes — e que esse conhecimento é geralmente subvalorizado, apenas porque parece mais pobre comparado com o conhecimento, aparentemente superior, dos especialistas nos vários campos." (p. 14)

Vimos que para Fenstermacher (1994), o conhecimento prático do professor engloba aspectos da sua vida mental, nomeadamente, os seus pensamentos, reflexões e propósitos. Na mesma linha, Elbaz inclui as crenças do professor nesse conhecimento mas considera ainda que ele engloba também conhecimento proposicional sobre determinados assuntos (como exemplo, refere que os professores têm um conhecimento de Psicologia "embora diferente e menos extenso que o do psicólogo", p. 14). Para delimitar e caracterizar o conteúdo do conhecimento prático do professor, Elbaz estabelece cinco categorias: "o conhecimento de si próprio, do ambiente do ensino, do assunto ensinado, de desenvolvimento curricular, e, de ensino" (p. 14). Como a autora salienta, estas categorias não obedecem a divisões disciplinares academicamente instituídas, mas foram estabelecidas por, em seu entender, serem relevantes para os professores. A primeira refere-se ao conhecimento que o professor tem de si como pessoa, a segunda ao seu conhecimento do contexto escolar e social onde desenvolve a prática docente, a terceira diz respeito ao conhecimento do professor sobre a matéria que ensina, a quarta e a quinta, respectivamente, ao conhecimento curricular do professor e ao seu conhecimento relativo aos alunos e a processos de ensino e aprendizagem.

Em segundo lugar, Freema Elbaz refere-se ao que designa por *orientações* do conhecimento prático do professor, significando com isso os diferentes modos como o professor "usa e mantém" o seu conhecimento, para as quais estabelece também cinco categorias: "orientação para as situações, orientação pessoal, orientação social, orientação experiencial e orientação teórica" (p. 14). Embora a expressão não seja utilizada, estas categorias permitem falar da natureza do conhecimento prático do professor, ou seja, de que tipo de conhecimento se trata e que características apresenta.

Considerar o conhecimento prático do professor orientado para as situações ou, como também diz, para a prática que o professor desenvolve, significa, como já foi evidenciado, atribuir-lhe uma natureza *situacional*, ou seja, reconhecer que, em alguma medida, é indissociável das situações práticas que os professores experimentam. No entanto, para Freema Elbaz, o carácter situado deste conhecimento não implica a ideia de que o professor precisa mais do conhecimento prático, do que do conhecimento teórico oriundo de outras disciplinas. "O conhecimento prático do professor não é uma compilação de conselhos práticos vindos de outros campos", diz a autora, acrescentando: "mas um corpo de conhecimentos orientado para um contexto prático particular" (p. 15). Este corpo de conhecimentos pode ser informado por outros campos científicos, mas é o contexto particular para que está orientado que determina a escolha da informação que é integrada, independentemente da natureza teórica ou prática dessa informação. Recorrendo à Psicologia, Elbaz dá um exemplo em que determinados instrumentos práticos usados pelos psicólogos podem ser totalmente inadequados no ensino e o mesmo não acontecer com certos conhecimentos teóricos dessa ciência.

Com duas das outras orientações atribuídas ao conhecimento prático do professor — a orientação *pessoal* e a orientação *social* — Freema Elbaz reconhece, nesse conhecimento, uma determinante com origem no indivíduo e uma determinante com origem na sociedade. Assim, por um lado, o conhecimento prático é pessoal na medida em que existe "uma necessidade pessoal em integrar, ordenar e dar sentido à experiência de cada um" (p. 16). Trata-se, no fundo, do reconhecimento da existência de uma perspectiva própria em cada indivíduo, a partir da qual ele percepciona, analisa e interpreta as situações que enfrenta e de que os objectivos do indivíduo e os significados que elabora desempenham um papel nesse processo. Nessa perspectiva, Elbaz inclui "não só concepções intelectuais, mas também percepções, sentimentos, valores, propósitos e interesses (*commitment*)" (p. 17). Por outro lado, o conhecimento prático tem também um carácter social na medida em que é "socialmente condicionado", carácter que se revela, como diz a autora referindo-se ao caso que estudou, "no modo como a professora, por exemplo, irá adaptar o assunto a tratar de forma a ter em conta os factores étnicos ou económicos que influenciam as expectativas, interesses e sentido cívico dos seus alunos (ou dos pais)" (p. 18).

Freema Elbaz considera ainda o conhecimento prático como *experiencial* e *teórico*. Aqui, também, uma dupla determinação desse conhecimento, agora segundo uma outra dimensão, a dimensão teoria-prática. Por um lado, recorrendo a autores da fenomenologia como Schutz e Luckmann, considera o mundo da experiência, com as suas "províncias da realidade" — vida quotidiana, sonhos, ciência, religião — onde inclui o "mundo do ensino", como elementos estruturadores do conhecimento prático. Provém daqui o seu carácter experiencial, de alguma forma já contido, como a autora salienta, nas três características — situacional, pessoal e social — já descritas. Por outro lado, considera que no conhecimento prático existem elementos teóricos, uma "orientação teórica", para usar a sua terminologia, reconhecendo a existência de conexões entre o conhecimento prático e o conhecimento teórico, dizendo mesmo que esse conhecimento "é mantido numa relação particular como o mundo da teoria" (p. 21). Os professores, diz-nos, "são influenciados por formas de pensamento e de discurso que os cercam; a sua formação académica aprofunda, invariavelmente, tais influências e instila concepções teóricas, concepções de conhecimento válido [e] de pesquisa" (p. 21), concepções estas que, uma vez integradas, fazem parte do conteúdo do seu conhecimento.

Em terceiro lugar, e por último, na conceptualização que faz do conhecimento prático dos professores, Freema Elbaz propõe uma *estrutura*, ou seja, um conjunto de componentes e suas relações, para esse tipo de conhecimento. Considerando que é este conhecimento que orienta o professor na sua prática, pressupõe a existência de alguma forma de organização interna, uma vez que sem tal organização, o conhecimento não seria mais que um conjunto de "receitas" desordenado — "um livro de cozinha sem índice" (p. 21) — sem possibilidade de poder constituir qualquer orientação. A estrutura proposta é uma organização hierarquizada por graus ou níveis de generalidade, a cada um dos quais a autora associa diferentes tipos de "instrumentos de ordenação" (*orde-*

ring devices). Apresenta três tipos de conhecimento, correspondendo a diferentes níveis de generalidade: dos mais específicos, que designou por "regras práticas" (*rules of practice*), aos mais gerais, "as imagens" (*images*), passando pelos "princípios práticos (*practical principles*), estes de nível de generalidade intermédio (p. 21).

A "regra prática" é definida como "uma formulação breve e clara do que há que fazer, ou de como o fazer, numa determinada situação que aparece frequentemente" (p. 132); os "princípios práticos" são apresentados como formulações mais abrangentes e mais implícitas, "nas quais as intenções do professor, subentendidas na regra [de prática], são mais claramente evidentes" (p. 133); as "imagens", ainda mais abrangentes e mais implícitas, são descritas como "noções muito amplas" que traduzem a perspectiva pessoal com que o professor se encara a si próprio, o ensino e a disciplina que lecciona, por vezes formuladas na forma de metáforas e envolvendo juízos de valor.

Estes três tipos de conhecimento, para além de possuírem graus de generalidade diferentes, a que correspondem graus de explicitação também diferentes, traduzem também conexões diferentes entre o pensamento e a acção. Segundo a autora, as regras práticas são uma espécie de conhecimento disponível de que o professor se serve na sua acção para não precisar de pensar; a sua utilização dispensa o pensamento. As imagens, ao contrário das regras, obrigam a pensar: "sem o pensamento, a imagem fica sem sentido, uma vez que sendo aberta assume diferentes significados em cada situação" (p. 134). Para além disso, a regra prática é considerada mais exterior (ao sujeito) do que a imagem e, exercendo-se de fora para dentro, impõe-se obrigando uma actuação em conformidade. A imagem, mais interior, traduz uma intencionalidade, um propósito, e exerce-se mais de dentro para fora, "inspirando, mais do que exigindo conformidade" (p. 134). No que se refere aos princípios práticos eles são apresentados como podendo actuar dos dois modos.

De uma forma simples podemos dizer que a regra prática está mais próxima da acção enquanto que a imagem está mais próxima da intenção. Entre as duas, o princípio prático, incluindo, como a regra, indicações sobre o que fazer e como fazer em determinadas situações, contém também indicações sobre as razões e propósitos que conduziram a pessoa na acção realizada. Por isso, o carácter pessoal do conhecimento é mais vincado (ou evidente) nos princípios do que nas regras práticas e, mais ainda, nas imagens.

Assim, em síntese, o conhecimento prático do professor, para Freema Elbaz, não é um mero saber-fazer, mas possui um conteúdo relativo a diversas áreas, desde a matéria ensinada, à própria pessoa do professor, desde as questões de ensino e de natureza curricular, ao contexto escolar e social em que a sua prática decorre. É um conhecimento essencialmente orientado para as situações que o professor enfrenta na sua acção educativa, de natureza, simultaneamente, pessoal e social, e, experiencial e teórica, e que se encontra hierarquizado em diferentes níveis de generalidade e de vínculo com a situação (a acção) ou com a pessoa. Estes níveis não estão isolados ou desligados uns dos outros mas, pelo contrário, existe interrelação entre eles: "um princípio ou uma imagem podem dar origem a várias regras que os exemplificam; uma imagem pode desenvolver-se a partir de princípios e regras que concorrem para ela" (p. 138).

D. Jean Clandinin e o "conhecimento prático pessoal"

Na linha de pensamento de Donald Schön e de Freema Elbaz, D. Jean Clandinin tem vindo a desenvolver um programa de trabalho onde a ideia de conhecimento prático tem também um papel central (Clandinin, 1985, 1986, 1987; Clandinin e Connelly, 1986). Colocando-se igualmente numa perspectiva em que o professor é visto como um sujeito activo e autónomo na prática que realiza, Clandinin considera-o também como possuidor de um conhecimento específico que se constitui e desenvolve em estreita relação com essa prática. Desta maneira, propõe-se contrariar uma visão corrente do professor como veículo de um conhecimento que lhe é exterior, como alguém a quem não se reconhece um saber próprio: "os professores são vistos como possuindo experiência mas não conhecimento" (Clandinin, 1986, p. 3). É a insatisfação com esta visão, como a própria autora o exprime, o que constituiu a grande motivação para o trabalho que desenvolveu onde, acima de tudo, pretende valorizar o conhecimento que admite o professor possuir.

Clandinin reconhece o trabalho de Frema Elbaz (1983) como precursor da sua própria investigação sobre o conhecimento do professor[1]. De facto, citando a própria Freema Elbaz, Clandinin (1986) caracteriza este conhecimento apresentando-o como um conhecimento "prático, experiencial e modelado pelas intenções e valores do professor" (p. 4). Apesar do qualificativo 'prático', esta autora recusa a separação tradicional entre conhecimento teórico e conhecimento prático, considerando que os professores desenvolvem um tipo especial de conhecimento que não é nem teórico nem prático, mas "composto" por estes dois tipos de conhecimento numa combinação elaborada pela pessoa do professor, de acordo com as suas características pessoais e com a sua experiência e formação (Clandinin, 1985). A esse conhecimento, chama "conhecimento prático pessoal" (*personal practical knowledge*) e relaciona-o com a necessidade da pessoa em desenvolver uma "linguagem" e uma "perspectiva" próprias para compreender e lidar com as situações da sua prática, considerando-o inseparável da pessoa que o elabora, bem como da situação (prática) onde se constitui e na qual se revela:

> "As acções são, simultaneamente, a expressão e a origem do conhecimento pessoal do actor. Assim, a acção está imbuída de conhecimento e o conhecimento de paixão. Acção e conhecimento estão unidos no actor e o que se diz sobre ambos diz respeito a *um* actor (em itálico no original)." (p. 361-362)

Na expressão conhecimento prático pessoal, Clandinin (1985) usa o termo 'conhecimento' referindo-se ao "conjunto de convicções" (*body of convictions*), neste caso, de um professor, que considera poderem ser conscientes ou inconscientes mas sempre com origem na experiência de cada um, seja ela de natureza mais pessoal ou social, e que se revelam nas acções que o professor desenvolve. O adjectivo 'pessoal', diz-nos a autora, é utilizado querendo significar por um lado, que esse conhecimento está impregnado de tudo o que constitui o professor enquanto pessoa e, por outro lado, que o conhecimento é também parte da pessoa do professor. Trata-se assim de sublinhar a forte relação deste conhecimento, em termos do seu significado e compreensão, com

[1] "Elbaz (1983) cujo trabalho é um antecessor (*forerunner*) do meu próprio trabalho" (Clandinin, 1985, p. 364); "A presente investigação desenvolve-se com base na descrição (*account*) de conhecimento prático elaborada por Elbaz (1983)" (Clandinin, 1986, p. 19).

a pessoa que o possui, com, como diz Clandinin, a sua história experiencial, pessoal e profissional. No que se refere ao qualificativo 'prático', a sua utilização pretende significar que se trata de um conhecimento que se revela na prática do professor e para cuja constituição e desenvolvimento essa prática desempenha um papel determinante. O termo 'prático, dizem Connelly e Clandinin (1986), "qualifica o [nosso] interesse epistemológico alinhando-nos com autores como Schön cujo interesse é a epistemologia do pensamento prático" (p. 296).

Cada um dos três termos utilizados evidencia também as opções teóricas e metodológicas seguidas e demarcam o campo da investigação. O termo 'conhecimento, segundo Connelly e Clandinin (1986), evidencia o carácter epistemológico do trabalho desenvolvido, o termo 'prático', o interesse pela "epistemologia do pensamento prático", e, o termo 'pessoal' revela que esse interesse incide no modo como "indivíduos específicos" conhecem as situações que vivem. Trata-se assim de, numa linha de valorização epistemológica da prática dos professores, estudar problemas do seu conhecimento do ponto de vista dos próprios professores. A expressão 'conhecimento prático pessoal', dizem os autores, "define o nosso interesse em compreender os actos de ensino em termos de explicações concretas personalizadas do conhecimento das pessoas" (p. 297).

Com esta ideia do conhecimento prático pessoal, como um conhecimento de carácter experiencial, transportando valores e propósitos do professor e orientado para a prática que ele desenvolve, Clandinin (1986) considera esse conhecimento como "transitório", "sujeito a mudanças" e desenvolvendo-se num processo de tentativa-erro, demarcando-se da ideia de um conhecimento "fixo, objectivo e imutável" (p. 20). Passa por aqui, sublinhe-se, um certo distanciamento em relação a Donald Schön como significa a crítica à opção deste autor no estudo do conhecimento do professor. "o conhecimento que se persegue já não é objectivo tal como Schön o considera ao 'observar' (entre comas no original) as situações" (Connelly e Clandinin, 1986, p. 296)[1].

[1] Connelly e Clandinin (1986) recusam quer o objectivismo de uma perspectiva que encara o conhecimento como independente do sujeito que conhece, quer o relativismo a que conduziria uma perspectiva meramente subjectivista; reclamam-se das ideias de Polanyi, considerando que o seu conceito de conhecimento pessoal resolve, dialecticamente, a oposição objectivo-subjectivo: "por 'conhecimento pessoal' Polanyi quer significar que o conhecimento não é

Um outro ponto de distanciamento em relação a Donald Schön diz respeito ao facto de este encarar as situações que o professor enfrenta na sua prática como situações problemáticas, nomeadamente, no que se refere à noção de reflexão-na-acção. Não contestando que o conceito de problema possa ter pertinência para o estudo das profissões em geral, Connely e Clandinin (1986), no entanto, colocam reservas à sua adequação para o estudo do que se passa na sala de aula do ponto de vista do professor. É assim que exprimem a sua preferência por um conjunto de outros conceitos que vão buscar a diversos investigadores[1] e, particularmente, pelo conceito de imagem.

Na verdade, o conceito de imagem é um conceito central no trabalho de D. J. Clandinin (1986). Para esta investigadora, tal como para Elbaz (1983), as imagens são uma componente do conhecimento prático do professor e, com a investigação que empreendeu, propõe-se precisamente desenvolver uma conceptualização desse constructo. Do ponto de vista de Clandinin, vimos atrás, o conhecimento prático pessoal revela-se e desenvolve-se na prática do professor e é impossível compreendê-lo desligado dessa prática. A experiência que o professor vive impregna o seu conhecimento e as imagens constituem a forma como a experiência penetra esse conhecimento. Usando uma metáfora da autora, as imagens são uma espécie de cristalização da experiência que, deste modo, passa a fazer parte do conhecimento prático pessoal do professor. Para Clandinin, as imagens constituem "uma forma de organizar e reorganizar a experiência passada"; uma imagem, como também diz, "é um meta-conceito organizador pessoal (...) na medida em que incorpora a experiência da pessoa, se exprime na [sua] prática e é a perspectiva com qual lida com novas experiências" (p. 166).

Na conceptualização que propõe para a noção de imagem como componente do conhecimento prático pessoal do professor, Clandinin propõe três dimensões para a sua caracterização: a dimensão moral, a dimensão emocional e a dimensão ao nível do pessoal privado e profissional (*personal private and professional dimension*). Assim, considera que as imagens contêm e exprimem

objectivo (...) nem é meramente subjectivo (...) é, de um ponto de vista dialéctico, a resolução do subjectivo e do objectivo na pessoa, isto é, o pessoal" (p. 296).

[1] Trata-se de conceitos como os de "regra prática" e "princípio prático" (referidos, entre outros, a Freema Elbaz (1983) que também usa o conceito de "imagem"), de "filosofia pessoal", de "rotina", de "ritual, hábitos, ciclos e ritmos", estes referidos a investigadores diversos (Connelly e Clandinin, 1986, p. 296).

juízos de valor, permitindo ao professor julgar a sua própria prática. "As imagens não são [moralmente] neutras", diz-nos, "sugerem uma acção melhor ou pior" (p. 147). Para além disto, considera que as imagens possuem "uma coloração emocional" e, por isso, também não são neutras do ponto de vista da afectividade. Neste sentido, podemos dizer, as imagens traduzem a orientação afectiva do professor face a determinada situação ou acção. É assim, pelas imagens, que os valores do professor e a sua afectividade penetram e constituem o seu conhecimento profissional. Além disso, para Clandinin, as imagens ligam mundos de experiência diferentes: "o constructo de imagem, na sua origem e nas funções que desempenha, liga a experiência privada pessoal e a experiência profissional educacional do indivíduo" (p. 148). As imagens, como também, diz aglutinam estes dois tipos de experiência, são a "coalescência" destes dois mundos experienciais. É assim que, pelas imagens, o conhecimento profissional do professor incorpora elementos da experiência extra profissional.

Em síntese

Uma ideia generalizada, como diz Clandinin (1986), "é que o professor não possui um corpo de conhecimentos exclusivo da sua profissão" (p. 9). Ao professor, como também diz, não se lhe reconhece conhecimento mas experiência; aquilo que a sua prática profissional lhe dará é tão só isso, experiência, sem estatuto de conhecimento. Deste ponto de vista, o conhecimento que se supõe o professor possuir, da matéria disciplinar que lecciona ou das técnicas e processos, abordagens e teorias para seu ensino e aprendizagem, é um conhecimento que vai buscar a áreas científicas ou académicas exteriores à sua profissão. Assim, não se atribui aos professores um saber próprio, desenvolvido no quadro da sua prática profissional. Ou melhor, o saber específico que se admite possuírem é um saber desvalorizado face ao que é produzido por especialistas na investigação científica ou educacional: "o conhecimento é visto como sendo teórico e na posse de peritos; o conhecimento experiencial dos professores não é reconhecido" (p. 3). O que se espera do professor é que use bem esse conhecimento e que o aplique competentemente, ficando-lhe reservado apenas o papel de "um mero agente realizando intenções de outrem" (p. 3), transmitindo conhecimento que lhe é exterior.

Para os autores analisados, o professor possui um conhecimento profissional específico que é visto, essencialmente, como um conhecimento voltado para a acção, isto é, orientado para as situações da prática com que o professor lida e que lhe permite interpretá-las, agir sobre elas e apreciar os resultados da sua actuação. Esses autores, com maior ou menor ênfase, atribuem a esse conhecimento três características principais, ou, se quisermos, reconhecem-lhe uma tripla natureza: experiencial, situacional e pessoal. Experiencial, uma vez que o consideram como um conhecimento que os professores adquirem com a experiência, um conhecimento que tem origem na prática que os professores empreendem e que se desenvolve e manifesta nessa prática. Situacional, pois encaram-no como um conhecimento orientado para as situações que o professor enfrenta e, de certa maneira, indissociável dessas situações. Pessoal, significando com isto que todo o conhecimento tem por base uma perspectiva própria de cada pessoa, estando impregnado pelas concepções, valores e propósitos que constituem aquela perspectiva, a partir da qual o indivíduo percepciona e compreende o mundo e desenvolve a sua actuação. Em Fenstermacher (1994) estão presentes estes três aspectos no modo como ele analisa o conhecimento prático; o carácter experiencial evidencia-se sobretudo nos conceitos de conhecimento-na-acção e reflexão-na-acção de Donald Schön (1991), enquanto que em Clandinin (1986) sobressai o carácter pessoal; Freema Elbaz (1983), por sua vez, a estes aspectos acrescenta ainda o que chamou de orientações social e teórica.

Na tentativa de valorização da profissão de professor, reconhecendo nela um saber específico com estatuto de conhecimento, introduz-se e desenvolve-se a ideia de conhecimento prático do professor com as características atrás referidas. Nesse desenvolvimento detecta-se um esforço quer para evitar a identificação deste conhecimento com um conhecimento meramente técnico, quer para ultrapassar algumas dicotomias habituais no estudo e caracterização de formas de conhecimento, nomeadamente: teoria-prática, razão-emoção, objectivo-subjectivo, individual-social, conteúdo-estrutura.

Podemos ver esse esforço em Freema Elbaz (1983) quando, por exemplo, esta autora considera que o conhecimento prático, sendo pessoal, tem também uma determinante social e quando, ao caracterizá-lo como experiencial, lhe atribui também uma orientação teórica e o reconhece como sendo "mantido numa relação particular com o mundo da teoria", considerando que a formação académica do professor "instila concepções teóricas" (p. 21) que são integradas no seu conhecimento. Em Clandinin (1986), por sua vez, é saliente a consideração de elementos afectivos no conhecimento. Na conceptualização que faz do conhecimento prático pessoal do professor, utiliza o conceito de imagem como uma componente desse conhecimento, descrevendo-o em várias dimensões, entre as quais a dimensão moral e a emocional. Deste modo faz impregnar o conhecimento pelos valores e pela afectividade do professor.

Podemos ver também o esforço referido na consideração do elemento reflexivo no conhecimento do professor, por parte de Donald Schön (1991), bem como, em Fenstermacher (1994), na menção à interdependência entre o saber e saber fazer (*knowing that, knowing how*), rejeitando a dicotomia entre estes dois tipos de conhecimento. Também Freema Elbaz (1983) sublinha a importância em reconhecer que o conhecimento prático tem um conteúdo, que é "sobre alguma coisa" e não apenas um mero saber-fazer. Para esta autora, o conhecimento prático tem um conteúdo e uma estrutura que o organiza segundo níveis de diferentes graus de generalidade e diferentes relações com a pessoa e com a acção. Clandinin (1985), por sua vez, refere-se ao conceito de conhecimento prático pessoal como não sendo, nem apenas conteúdo, nem apenas estrutura, observação que vai buscar a M. Johnson (1984) numa análise ao trabalho de Freema Elbaz: "o conhecimento prático não é apenas conteúdo nem é apenas estrutura — é um exercício de capacidades num determinado contexto para a organização imaginativa da nossa experiência" (p. 467).

No que se refere à dicotomia teoria-prática, Clandinin (1985) considera que o conhecimento que os professores desenvolvem não é nem teórico nem prático mas um conhecimento "especial" que descreve como sendo "composto" por aqueles dois tipos de conhecimento. Freema Elbaz (1983), por sua vez, vai ao ponto de incluir, no conteúdo do conhecimento prático, formas de conhecimento proposicional. Além disso, quando lhe atribui um carácter situacional, recusa a ideia de que ele possa ser considerado como uma "compilação de conselhos práticos" oriundos de outras áreas e a ideia de que o professor precisa mais do conhecimento prático do que do conhecimento teórico produzidos nessas áreas. A respeito das relações entre teoria e prática, estas autoras inserem-se uma perspectiva dialética considerando-as "inseparáveis" uma da outra, influenciando-se e modelando-se reciprocamente.

Esta perspectiva faz-se também sentir no que se refere à dicotomia objectivo-subjectivo e no esforço feito para a ultrapassar. É assim que Connelly e Clandinin (1986) por um lado, não aceitam a ideia de um conhecimento puramente objectivo, do sujeito que conhece e, por outro lado, recusam a perspectiva relativista que vê o conhecimento como meramente subjectivo.

Rejeitando o modelo da racionalidade técnica, linhas de investigação como as que acabei de analisar propõem-se desenvolver uma epistemologia do conhecimento do professor que reconheça e integre a existência de elementos essenciais nesse conhecimento que só se desenvolvem e manifestam na prática do professor. Com a ideia de "conhecimento prático" pretende-se contrariar a visão da profissão de professor que a entende, essencialmente, como um exercício técnico no qual o professor é um mero veículo para a aplicação instrumental de um conhecimento que outros produzem. Contrapõe-se a ideia do professor como sujeito autónomo, sede de valores e intencionalidades, dotado, como diz Elbaz (1983), de "recursos preciosos" que lhe dão capacidade de intervir no contexto em que se insere e de "determinar o estilo e objectivos do seu trabalho" (p. 6), valorizando-se assim o professor enquanto possuidor de um conhecimento próprio, específico da sua profissão.

IV — A Matemática e a actividade matemática

A Matemática escolar: perspectivas e orientações curriculares

A Matemática é, reconhecidamente, um dos ramos do conhecimento humano que há mais tempo é objecto de ensino e, enquanto tal, uma das disciplinas a que, ao longo dos séculos, tem sido sempre atribuída grande importância nos currículos escolares. Sem recuarmos muito no tempo, depois de um período de relativa estabilidade até às primeiras décadas do século passado, o currículo da Matemática escolar relativo ao que hoje chamamos ensino básico e ensino secundário, começou a sofrer modificações, quer ao nível do seu conteúdo, quer ao nível da sua organização, alterando-se também a própria ideia de currículo.

Desde meados do século XX que na maioria dos países ocidentais, de uma forma mais ou menos intensa ou profunda e com concretizações diversificadas e de alcance variado, têm vindo a ocorrer sucessivas reformas no ensino da Matemática. As perspectivas e orientações curriculares associadas a esses movimentos reformadores, muito particularmente no que dizem respeito aos conteúdos, métodos e objectivos de ensino, dão indicações sobre as concepções relativas à Matemática e à actividade matemática, que lhes estão subjacentes.

Por uma Matemática nova nas escolas secundárias[1]

No período do pós-guerra e ao longo dos anos 50, em muitos países da Europa e também em países desenvolvidos do outro lado do Atlântico, muito em particular nos Estados Unidos da América[2], começou a tomar corpo a ideia de que se tornava necessário e urgente uma reforma no ensino da Matemática. Na verdade, durante toda a década de 50, foram tendo lugar numerosas iniciativas e realizações, de natureza variada e com propósitos diversificados, que tinham em comum a preocupação e a intenção de modificar os currículos do ensino da Matemática visando a actualização dos temas matemáticos ensinados, bem como a introdução de novas reorganizações curriculares e de novos métodos de ensino (Matos, 1988; Moon, 1986; NACOME, 1975).

Em 1959, a culminar este interesse muito alargado de modernização do currículo de Matemática, a Organização Europeia de Cooperação Económica (OECE) decidiu realizar um inquérito sobre a situação do ensino dessa disciplina nos seus países membros, bem como uma sessão de trabalho apoiada nos resultados desse inquérito, visando promover uma reforma generalizada e tão profunda quanto possível do ensino da Matemática (OECE, 1961a). No primeiro parágrafo do relatório final dos trabalhos então desenvolvidos, diz-se concretamente: "em muitos países da OECE encara-se seriamente [a possibilidade] de reformar de uma maneira radical o ensino da Matemática ou pelo menos de introduzir melhoramentos consideráveis nesse ensino" (p. 11).

---

[1] As escolas secundárias (ou o ensino secundário), na época a que este ponto se refere, de um modo geral abrangiam os níveis etários entre os onze e os dezoito anos.

[2] É corrente a ideia de que nasceu nos Estados Unidos da América o movimento e impulso que veio a lançar a reforma para a modernização do ensino da Matemática dos anos 60. Bob Moon (1986), no entanto, considera esta visão muito simplista, tal como a ideia, também muito divulgada, de que foi a reacção nos EUA ao lançamento do Sputnik que veio a estar na origem da realização do Seminário de Royamont, ideia que, como diz, "não é sustentada pelos factos" (p. 65). Segundo Moon, as bases da reforma da Matemática Moderna, desenvolveram-se em paralelo na Europa e nos Estados Unidos e "os americanos viram Royamont como uma oportunidade para aprender sobre os desenvolvimentos europeus" (p. 47). Diz-nos Moon que existia um desfasamento significativo entre a experiência americana e a europeia no que se refere ao movimento reformador em germinação, e os recursos financeiros gerados pelo impacte do lançamento do Sputnik foram utilizados pela comunidade educativa americana "para compreender o que se estava a passar nos outros países, assim como para, no processo, fazer progredir a causa [da modernização do ensino da Matemática]" (p. 66).

A sessão de trabalho prevista realizou-se em finais de 1959[1], no *Cercle Culturel de Royamont*, em Asnières-sur-Oise, França, com a duração de duas semanas e com a participação de cerca de cinquenta delegados de dezoito países[2]. Esta reunião, que veio a ficar conhecida como o Seminário de Royamont, é certamente a realização mais emblemática de todo o movimento reformador de grande influência internacional que recebeu o nome de Matemática Moderna e, também, uma das mais conhecidas na história da evolução curricular recente do ensino da Matemática. Em meados dos anos oitenta, num estudo que analisa este movimento reformador e as suas concretizações em alguns países, Bob Moon (1986) inicia o capítulo sobre a Matemática Moderna, entendida como um fenómeno global, dizendo que o Seminário de Royamont "entrou para o folclore do movimento do desenvolvimento curricular" e "é habitualmente apresentado como o início da reforma curricular na Europa, com base nos assuntos [matemáticos]", considerando-o ainda como "o mais famoso exemplo" (pp. 43 e 44) do conjunto de realizações que se lhe seguiram e que conferiram uma perspectiva internacional à educação matemática.

A concepção bourbakista da Matemática. A proposta de reforma delineada em Royamont e a sua especificação realizada em 1960, em Dubrovnik, com a elaboração de "Um programa moderno de Matemática para o ensino secundário" (OECE, 1961b)[3], foi fortemente influenciada pelas ideias estruturalistas

[1] A realização do inquérito e a análise dos seus resultados não decorreu no calendário esperado o que, no entanto, segundo os redactores do relatório final, não prejudicou os trabalhos. Isto é dito, explicitamente, no prefácio ao relatório que foi elaborado por Howard Fehr (Universidade de Columbia) com a colaboração de Luke Bunte (Universidade de Utrecht), que retiram do facto uma consequência positiva, uma vez que consideram que, desse modo, os participantes puderam dedicar-se ao trabalho previsto "sem se deixarem influenciar pelos programas em vigor, nem pela situação actual" (OECE, 1961a, p. 7).

[2] Para a sessão de trabalho foi pedido a cada país participante que enviasse três delegados, "um matemático eminente, um especialista em pedagogia da Matemática ou uma pessoa do Ministério da Educação responsável pela disciplina de Matemática e um professor de Matemática reputado do ensino secundário" (OECE, 1961a, p. 7).

[3] *Un programme moderne de mathématiques por l'enseignement sécondaires*. Trata-se, efectivamente, do título do livro publicado pela OECE em 1961, dando seguimento a uma das conclusões gerais do seminário de Royamont onde se recomendava, explicitamente, que, para lançar as bases da reforma pretendida, a OECE constituísse uma comissão de peritos (professores matemáticos, professores de Matemática universitários, das escolas secundárias e das instituições de formação de professores) que fosse encarregue de elaborar "um quadro sinóptico do conjunto dos assuntos [matemáticos] (...), precisando o espírito dentro do qual esses assuntos deveriam ser ensinados" (OECE, 1961a, p. 130). Esta comissão, constituída por

dominantes na época, em particular no que se refere à Matemática e à Psicologia. Em relação a esta última, o trabalho de Jean Piaget assumiu uma visibilidade significativa no seminário de Royamont, sendo disso indício, nomeadamente, a menção de Marshal Stone, que presidiu aos trabalhos do seminário, às pesquisas de Piaget, destacando-as entre as que, em sua opinião, deram origem a "possibilidades [até então] desconhecidas em pedagogia" (Stone, 1961, p. 24), bem como a intervenção de Gustave Choquet sobre o ensino dos números e das operações que seguiu de perto as ideias de Jean Piaget sobre a génese do número na criança[1].

Ainda a propósito da influência e do papel que as ideias piagetianas terão tido como fundamento psicológico da reforma que então se visava, cabe aqui referir que, em 1952, Piaget defendeu a correspondência entre as estruturas matemáticas conhecidas, base de toda a "arquitectura" bourbakista da Matemática (Bourbaki, 1971), e as estruturas operatórias da inteligência[2], chegando mesmo a recomendar que tal facto deveria servir de base à didáctica da Matemática: "se o edifício da Matemática assenta sobre estruturas que por sua vez correspondem às estruturas da inteligência, é sobre a organização progressiva destas estruturas operatórias que é necessário basear a didáctica da Matemática" (Piaget, 1965, p. 32).

No que se refere à Matemática, a influência da concepção estruturalista fez-se sentir através das ideias bourbakistas que assumiram grande preponderância, particularmente, e directamente, através dos contributos de Jean Dieudonné, reputado membro e um dos líderes do grupo de matemáticos Bourbaki (mas também através, nomeadamente, das intervenções de Gustave Choquet e Willy Servais). Em Royamont, foram apresentadas várias propostas de âmbito diferente e incidindo sobre assuntos diversificados para reformar os programas de

---

dezasseis elementos, a maioria dos quais professores universitários, reuniu-se em Dubrovnik em 1960 durante cerca de um mês (OECE, 1961b), e, do seu trabalho, resultaram as propostas de programas para os vários ciclos do ensino secundário, reunidos no livro atrás referido.

[1] O conhecido livro de Jean Piaget "La Genèse du Nombre chez l'Enfant" é mesmo citado no relatório do seminário, a propósito da intervenção de Gustave Choquet (p. 66).

[2] Diz Piaget (1965): "É do mais alto interesse constatar que (...) encontramos em todas as etapas, em primeiro lugar, uma tendência fundamental para a organização de totalidades ou de sistemas (...), e em seguida, uma repartição desses sistemas de conjunto segundo três espécies de propriedades que correspondem, precisamente, às propriedades das estruturas algébricas, das estruturas de ordem e das estruturas topológicas" (p. 15).

Matemática, mas a que mereceu maior destaque — "ainda que não tenha sido unanimemente aprovada" (OECE, 1961a, p. 31) — e veio posteriormente a celebrizar-se mais, foi, justamente, a proposta de Jean Dieudonné[1].

Na concepção bourbakista da Matemática (Bourbaki, 1971), há três ideias que ocupam um lugar chave: a unidade da Matemática, o método axiomático e o conceito de estrutura matemática. A concepção unitária da Matemática, lembra-nos Bourbaki, é antiga, e está presente, por exemplo, nos pitagóricos quando defendiam que todas as coisas eram números, em Descartes que criou a Geometria analítica, ou ainda, mais recentemente, na tentativa logicista de reduzir a Matemática à Lógica. Aos insucessos repetidos das diversas tentativas de unificação da Matemática, o autor considera que, já neste século, sobreveio a ideia de que tal objectivo — unificar a Matemática — era inatingível, e que "havia pouca esperança em ver a Matemática como uma ciência caracterizada por um único objectivo e por um único método" (p. 25) e procura contrariar tal tendência[2], afirmando a convicção oposta:

> "Hoje em dia, acreditamos, pelo contrário, que a evolução interna da Matemática tem, apesar das aparências, fortalecido, mais do que nunca, a unidade das várias partes, e criou uma espécie de núcleo central (*central kernel*), nunca antes tão coerente." (p. 25)

Na concepção bourbakista, este fortalecimento progressivo da unidade da Matemática consistiu essencialmente numa "sistematização" das relações entre as teorias matemáticas com o recurso ao método axiomático (Bourbaki, 1971) que emerge, segundo este ponto de vista, como o método da Matemática. Para uma melhor compreensão da concepção bourbakista da Matemática e da ideia de axiomatização, nomeadamente no que se refere ao seu papel e importância nesta ciência, cabe aqui uma menção ao esclarecimento e distinções que Bour-

---

[1] A proposta deste matemático, considerada audaciosa, inovadora e como representando uma perspectiva de "vanguarda" (OECE, 1961a, p. 31), foi mesmo a única a ser reproduzida na totalidade no relatório final do seminário.

[2] Como exemplificação desta tendência, Bourbaki (1971) recorre a Léon Brunschvicg, quando este autor diz (apresento em tradução a citação completa no original francês): "Parece que, em primeiro lugar, existem *as matemáticas* (em itálico no original), isto é, uma série de disciplinas fundadas em noções particulares, delimitadas com precisão, encadeadas com rigor. Em seguida, entre esses domínios bem determinados, mil caminhos de comunicação e de ramificação virão mostrar a coordenação dos métodos, estender o horizonte da sua aplicação, suscitar novas aplicações ou novos problemas." (Brunschvicg, 1993, p. 447)

baki procura fazer, confrontando método axiomático, raciocínio dedutivo e formalismo lógico.

O autor começa por considerar como mera trivialidade, dizer-se que é o raciocínio dedutivo que confere unidade à Matemática[1] (Bourbaki, 1971), e justifica esta sua consideração com base no facto, que assume como genericamente reconhecido, de que a forma de uma "longa cadeia de raciocínios"[2] (p. 25) como a Matemática é vista, diz respeito apenas à sua exterioridade, à sua aparência. Raciocinar silogisticamente, continua o autor, é um mero "*mecanismo* transformador" (p. 25, em itálico no original) que, por ser aplicável a quaisquer premissas, nada nos diz sobre a sua natureza. Por isso, o raciocínio dedutivo, acrescenta ainda, "é a *forma* exterior que o matemático dá ao seu pensamento", é apenas uma espécie de suporte de comunicação[3], a "*linguagem* própria da Matemática " (pp. 25-26, itálicos no original), e conclui:

> "Codificar esta linguagem, ordenar o seu vocabulário e clarificar a sua sintaxe é realizar um trabalho muito útil, constituindo uma genuína faceta do método axiomático que pode ser correctamente chamada de formalismo lógico (...). Contudo — e insistimos neste ponto — *ela é apenas uma faceta* e a menos interessante." (p. 26, itálico no original)

Relativamente à evolução recente da Matemática, Léon Brunschvich (1993) considera que os momentos mais importantes são aqueles que correspondem à descoberta de que duas áreas matemáticas, que até então se desenvolviam por si sós sem qualquer interacção entre elas, "e que pareciam votadas a uma separação definitiva, entram subitamente em contacto, emprestando uma à outra um auxílio inesperado" (p. 446). A concepção axiomática bourbakista, rejeita este modo de ver o desenvolvimento da Matemática para uma unidade cada vez mais plena, nomeadamente a forma como apresenta a descoberta de

---

[1] Com alguma ironia, Bourbaki chama a atenção que a pretensão de que o raciocínio dedutivo caracteriza a unidade da Matemática, não tem em conta a complexidade das diferentes teorias matemáticas e que essa aspiração seria equivalente a pretender que o método experimental unificaria ciências tão diferentes como a Física e a Biologia.

[2] Bourbaki faz aqui apelo a Descartes, atribuindo-lhe esta ideia relativa à Matemática.

[3] Para sublinhar o carácter mecânico do raciocínio silogístico e a sua incompletude no que se refere à compreensão da Matemática, diz-nos ainda o autor: "todo o matemático sabe que uma demonstração não é 'compreendida' se ele apenas tiver verificado, passo a passo, a correcção das deduções, sem tentar compreender claramente as ideias que conduziram à construção desta cadeia de deduções com primazia face a todas as outras" (Bourbaki, 1971, p. 25).

interacções entre domínios matemáticos que até determinada altura se desenvolviam isoladamente. "Onde um observador superficial vê apenas duas ou mais teorias aparentemente muito distintas prestando-se mutuamente 'um auxílio inesperado'", diz Bourbaki (1971), referindo-se à afirmação de Brunschvich atrás citada, o método axiomático através da acção do matemático criativo, "ensina-nos a procurar as razões profundas para esta descoberta, a descobrir as ideias comuns escondidas sob o aparato exterior de detalhes próprios de cada uma das teorias consideradas, a isolar essas ideias e a torná-las visíveis" (p. 26). São deste modo explicados, o papel e a importância do método axiomático na Matemática, que numa frase são resumidos da seguinte maneira "aquilo que a axiomática estabelece como o seu objectivo essencial é precisamente aquilo que o formalismo lógico por si só não pode proporcionar: a profunda inteligibilidade da Matemática" (p. 26).

Há portanto, em Bourbaki (1971), uma distinção entre formalismo lógico e método axiomático[1] ou, se quisermos, entre a formalização e a axiomatização matemáticas. A apresentação dedutiva da Matemática, como vimos, é considerada apenas como a sua face exterior, a forma como ela se nos afigura, e, o raciocínio dedutivo como não sendo senão a linguagem que permite ao matemático comunicar o seu pensamento. Cabe ao formalismo estabelecer esta linguagem, e a formalização matemática, podemos dizer, esgota-se nesta missão, trabalho tido como necessário e útil, mas sendo visto apenas como um aspecto ou componente do método axiomático, de mais a mais considerado, sublinhe-se, como o de menor interesse. Não se reconhece a possibilidade de, recorrendo apenas ao formalismo lógico, chegar à compreensão matemática; este grande objectivo, atingir, como foi dito, a inteligibilidade que subjaz à Matemática, é reclamado para a axiomática, sendo considerado que só ela o pode proporcionar:

> "Tal como o método experimental se desenvolve a partir da crença a priori da constância das leis naturais, o método axiomático encontra o seu fundamento na convicção de que, se a Matemática não é uma sequência de silogismos desenvolvendo-se aleatoriamente, também não é

[1] O autor considera que, só pelo facto de a Matemática estudar formas abstractas, as estruturas matemáticas, cujo conteúdo intuitivo inicial que "não pode ser negado", foi "voluntariamente esvaziado" para tornar possível o seu uso pleno de eficácia, é que o método axiomático pode ser visto como um formalismo (Bourbaki, 1971, p. 36).

um conjunto de artifícios mais ou menos 'ardilosos', consistindo em justaposições fortuitas, triunfo de mera astúcia técnica". (p. 26)

Até agora vimos que na concepção bourbakista (Bourbaki, 1971) a Matemática é concebida como uma ciência cuja evolução evidencia a sua cada vez maior unidade, podendo assim ser caracterizada como uma ciência com um método e um objectivo próprios. Vimos que, segundo esta perspectiva, o seu método é o método axiomático, faltando abordar a questão de como é tratado o problema do objectivo unitário para Matemática. É justamente aqui que entra a terceira ideia central da concepção bourbakista, a ideia de estrutura. Segundo esta concepção, a Matemática estuda estruturas, estruturas estas que são consideradas "os *únicos 'objectos'* da Matemática"[1] (p. 29, itálico no original); uma estrutura matemática é definida por certas propriedades postuladas a que obedecem determinadas relações entre os elementos de um dado conjunto[2]; e, o que caracteriza as estruturas matemáticas, é o facto de se aplicarem a elementos "cuja natureza *não é especificada* " (p. 28, itálico no original): "a natureza dos elementos", diz mesmo o autor, "é [aqui] completamente irrelevante" (p. 28), sublinhando que a única hipótese considerada é esses elementos obedecerem às propriedades enunciadas. Estas propriedades constituem os axiomas da estrutura[3] e o estudo das estruturas consiste na "dedução das consequências lógicas dos [seus] axiomas" (p. 29).

---

[1] Tal como é apresentada, esta ideia de considerar as estruturas como os únicos objectos matemáticos surge na sequência das sucessivas tentativas de definir as entidades básicas da Matemática — dos números, aos conjuntos — e das dificuldades que essas tentativas sempre colocaram, nomeadamente no caso destes últimos, devido "ao carácter extremamente geral e à natureza muito vaga das concepções mentais que evocavam"(Bourbaki, 1971p. 29).

[2] Esta definição de estrutura matemática, não é a definição mais geral que deverá considerar a situação das propriedades da estrutura se aplicarem não só aos elementos, mas também a partes do conjunto e mesmo a "elementos do conjunto de grau mais elevado dentro do que é chamado como escala de tipos (Bourbaki, 1971p. 29). De uma outra forma, Sebastião e Silva (1953) diz que esses elementos podem ser "indivíduos" (elementos do conjunto dado), "classes" (subconjuntos, famílias de subconjuntos...), ou "relações" definidas no conjunto dado ou em conjuntos dele obtidos.

[3] Bourbaki (1971) chama a atenção para o facto de que aqui, a noção de axioma como propriedade postulada — isto é, que apenas pede que seja aceite como verdadeira (etimologicamente postular, do latim *postulare*, significa pedir, solicitar — está muito distante da noção antiga de axioma como verdade auto evidente de aceitação geral. Deste ponto de vista, axioma e postulado são sinónimos. Esta equivalência de significado entre estas duas noções, é uma das características do conceito moderno de axiomática, segundo o qual "não há que fazer distinção entre postulado e axioma" (Silva, 1953, p. 3, também em Oliveira, 1991)

Sendo uma estrutura matemática definida por um conjunto de propriedades a que determinadas relações, entre os elementos de um dado conjunto, obedecem — qualquer que seja a sua natureza — todos os teoremas deduzidos dos seus axiomas são gerais, no sentido de que se aplicam a quaisquer relações entre outros elementos que obedeçam às propriedades da estrutura considerada. Por este motivo, Bourbaki (1971) considera as estruturas matemáticas também como "instrumentos" que o matemático pode utilizar na sua investigação, pois, "uma vez que ele tenha descoberto relações entre os elementos que estuda, satisfazendo os axiomas de um tipo de estrutura conhecido, tem à sua disposição o inteiro arsenal de teoremas gerais relativos a estruturas deste tipo" (p. 33) para o estudo que realiza. E, sem tais instrumentos, diz-nos ainda o autor, o matemático disporia apenas dos seus recursos pessoais. É por esta razão que se refere ao método axiomático como uma espécie de taylorismo ou "gestão científica", aplicada à Matemática, fazendo no entanto notar que o estudo que o matemático realiza não é meramente um trabalho mecânico, mas guiado por uma "intuição especial" a que atribui um "papel fundamental"[1] nesse trabalho.

Bourbaki (1971) distingue esta intuição especial da intuição do senso comum, considerando-a como uma "adivinhação directa" (p. 31) — no sentido, como diz o autor, de ocorrer antes de qualquer raciocínio — por parte do matemático, da forma como se comportam as entidades com que trabalha, e às quais tem acesso pela familiaridade que estabeleceu com elas, proporcionada pelo repetido e prolongado contacto com essas entidades que assim lhe surgem "tão familiares quanto os objectos do mundo real" (p. 31). E, concluindo a sua visão do papel e importância deste tipo intuição e da axiomatização na Matemática, diz-nos:

> "A Matemática está mais longe do que nunca de [poder] ser reduzida a um jogo puramente mecânico de fórmulas matemáticas isoladas; nunca como antes a intuição domina a génese das descobertas matemáticas. Todavia, a Matemática tem hoje à sua disposição alavancas poderosas fornecidas pela teoria dos principais tipos de estruturas e num único olhar acede às imensas regiões unificadas pela axiomática, onde antes parecia reinar o caos mais disforme". (p. 31)

[1] Papel que o autor considera que não deve ser "sobreestimado" (p. 31).

Importa dizer que, relativamente à visão da Matemática aqui proposta, os seus próprios defensores recomendam que ela deve ser considerada apenas como uma "aproximação muito grosseira" da Matemática real (Bourbaki, 1971, p. 339). Entre outros aspectos, é chamada a atenção para o facto de a descrição proposta ser uma descrição "rígida"[1]: "nada é mais estranho ao método axiomático do que uma concepção estática da ciência", dizem os autores, pois "as estruturas não são imutáveis, nem no seu número, nem na sua forma" (p. 34), acrescentando que a evolução e o desenvolvimento da Matemática poderá conduzir à descoberta de novas estruturas:

> "A julgar pelos que produziram as estruturas actualmente conhecidas, podemos dar como adquirido que irá verificar-se um progresso decisivo na *invenção* de [novas] estruturas (itálico no original). Naturalmente, as estruturas [já conhecidas] não são de modo nenhum edifícios completos, e seria muito surpreendente se toda a essência da sua fonte estivesse já esgotada." (p. 34)

A justificação da reforma e as suas finalidades educativas. A necessidade de mudança no ensino da Matemática manifesta em diversos países europeus, referida ao ensino não superior, vinha a ser sentida desde o início da década de cinquenta, e também em países do outro lado do Atlântico, muito em particular, nos Estados Unidos da América[2]. Os seus mentores e promotores presentes em Royamont justificaram a urgência e a necessidade dessa mudança invocando imperativos de natureza social, razões relacionadas com o desenvolvimento da Matemática e razões relacionadas com o progresso científico e tecnológico[3].

---

[1] Para além deste aspecto, os autores consideram a descrição realizada "esquemática" —como fazem notar, "as coisas não acontecem da forma tão simples ou regular" como é sugerido — e "idealizada" pois, relativamente às estruturas principais o seu "exacto papel está longe de ser perfeitamente conhecido em todas as áreas da Matemática" (Bourbaki, 1971, pp. 33-34).

[2] Os Estados Unidos da América do Norte e o Canadá não eram membros da OECE mas participaram também no inquérito e nos trabalhos do seminário de Royamont. Em 1960, vieram contudo a integrar aquela organização que, com a sua entrada, passou a denominar-se Organização para o Desenvolvimento e Cooperação Económica (OCDE).

[3] Na exposição sobre os "argumentos em favor de uma reforma" que inicia o relatório do seminário, podemos encontrar:

— "A sociedade exige cada vez mais de todos os cidadãos o conhecimento de noções elementares de Matemática e o reconhecimento da importância do ponto de vista numérico."

— "Solicitam-se cada vez mais investigadores e engenheiros e que todos eles devam possuir conhecimentos matemáticos sólidos."

Marshall Stone, na conferência com que abriu os trabalhos, depois de referir que grande parte dos assuntos matemáticos, que então se ensinavam aos alunos até ao final do ensino secundário, provinha de há pelo menos duzentos anos, e que, neste período de tempo, "e mesmo durante o último século", como frisou, "se fizeram mais descobertas matemáticas do que no decurso de toda a restante história da humanidade" (Stone, 1961, p. 16), sintetiza, do seguinte modo, as razões para uma reforma do ensino da Matemática:

> "Duas razões principais nos obrigam a analisar com um novo olhar a Matemática que nos propomos ensinar aos jovens ao longo dos seus estudos secundários e dos primeiros anos da universidade. Há, em primeiro lugar, o extraordinário desenvolvimento da Matemática pura da nossa época. Há em seguida o facto de que o pensamento científico é cada vez mais tributário dos métodos matemáticos, numa era em que a sociedade tem necessidade de um número sempre crescente de investigadores de todas as disciplinas." (Stone, 1961, p. 15)

Estes eram os argumentos com que os proponentes justificavam a reforma pretendida para o ensino da Matemática, defendida em Royamont com entusiasmo, convicção e optimismo, como se pode depreender do tom geral de várias das intervenções no seminário e de análises sobre essa reforma — as de Fey (1978) e de Moon (1986), por exemplo — e também, dos breves testemunhos de uma das participantes, Emma Castelnuovo (Castelnuovo, 1983, 1990). Nas conclusões gerais do seminário, o programa que tinha sido delineado durante os trabalhos é considerado "muito imaginativo, desafiador e bastante revolucionário" (p. 111), e é bem evidente o sentimento de que o que se propunha, em termos do ensino da Matemática, era profundamente diferente face ao que então se praticava na generalidade das escolas. "Em relação aos programas actuais", diz-se nas conclusões gerais do seminário, "a reforma apresentada pela sessão de estudo representa uma mudança bastante radical", acrescentando-se: "se a mudança se concretizar dentro de dez anos, será a primeira no espaço de um século, e, com toda a evidência, essa mudança será muito tardia" (p. 131).

— "As novas aplicações da Matemática na indústria e em outros ramos da actividade económica obrigam a que sejam necessários mais matemáticos e que eles possuam conhecimentos matemáticos novos." (OECE, 1961a, p. 11)

Em termos de finalidades para o ensino da Matemática, os grandes propósitos da mudança pretendida são formulados considerando a disciplina de Matemática sob um duplo ponto de vista: "o ensino geral" e "a formação dos alunos muito dotados (*brillament doués*)" (p. 164). São apresentadas três finalidades formuladas do seguinte modo: "Foram tidas em conta, em todas as discussões, três finalidades educativas que em parte se recobrem mas que não são certamente contraditórias:

> a) a Matemática como método de ensino liberal (meio de formar o espírito);
>
> b) a Matemática, base para a vida e para o trabalho (instrumento necessário a todos);
>
> c) a Matemática, enquanto propedêutica (preparação para os estudos universitários)." (p. 64)

Ou seja, reclama-se para a Matemática, em termos das finalidades do seu ensino, um triplo papel. Um papel formativo que, apesar de ser enunciado de um modo muito genérico, podemos dizer que é visto como um meio de desenvolver as capacidades mentais e intelectuais do aluno, um papel de preparação dos alunos tendo em vista o prosseguimento dos seus estudos, e um papel instrumental no que se refere à sua inserção na vida quotidiana e profissional. No entanto, a encerrar as conclusões do relatório, quando é enunciado o propósito com que os trabalhos de reforma são encarados, a primeira das finalidades anteriormente apresentadas não aparece, mantendo-se apenas as outras duas que visavam a preparação dos alunos para a vida quotidiana e para a continuação dos seus estudos[1].

As orientações e propostas curriculares de Royamont. A proposta da Matemática Moderna é hoje considerada um projecto reformador que, na sua concretização e no seu desenvolvimento, se veio centrar essencialmente numa mudança na estrutura e nos assuntos matemáticos do currículo. No entanto, os seus promotores em Royamont consideravam que a reforma era necessária,

[1] Diz-se no relatório que é duplo o objectivo dos esforços empreendidos: "em primeiro lugar, preparar melhor os alunos para os estudos universitários; em seguida por à disposição de cada um, um instrumento utilizável na vida de todos os dias" (OECE, 1961a, p. 132).

quer ao nível dos conteúdos matemáticos, quer ao nível dos métodos de ensino. Na verdade, esta dupla incidência com que a reforma era proposta é explicitamente formulada no relatório do seminário e permeia muitas das intervenções que ocorreram durante os trabalhos. "Todos estes elementos [que justificavam a necessidade de uma reforma] militam em favor de uma revisão do conteúdo e dos métodos de ensino da Matemática" (p. 11), diz-se logo nos primeiros parágrafos do relatório, assim como são aí valorizados aspectos como a "troca de pontos de vista entre os promotores de novos métodos de ensino da Matemática" (p. 12) e aqueles que irão elaborar nos novos programas, sublinhando-se que essa troca deveria incidir, não só sobre as transformações programáticas, mas também sobre "as técnicas pedagógicas e os problemas psicológicos" (p. 12) que esse ensino coloca. Igualmente, na especificação da reforma já referida — "Um programa moderno de Matemática para o ensino secundário" (OECE, 1961b) — elaborada cerca de um ano depois, na sequência das orientações e recomendações saídas de Royamont, constam, para além do conjunto dos temas e subtemas matemáticos, propostos para integrar os novos programas, indicações de carácter metodológico com algum desenvolvimento e de diferente grau de generalidade[1].

Também René Thom, um dos fortes detractores da reforma da Matemática Moderna, quer ao nível pedagógico, quer ao nível dos seus pressupostos epistemológicos (Thom, 1970), embora reconhecendo a grande complexidade da Matemática Moderna no que diz respeito às suas origens e ao que a constitui como movimento reformador, não deixa de lhe atribuir quer o objectivo de renovação pedagógica, quer o objectivo de modernização do currículo (Thom, 1973). A mesma dupla incidência, portanto, nos métodos de ensino e nos assuntos matemáticos curriculares, também reconhecida por James Fey, em 1978, na sua análise das mudanças na educação matemática nos Estados Unidos da América: "o projecto da 'Matemática Moderna' tendo em vista [a introdução no ensino] de novos conteúdos, nova estrutura curricular e novos estilos pedagógicos, constituiu uma ambiciosa agenda para os responsáveis pelo desen-

[1] Por exemplo: "As situações concretas familiares aos alunos podem ser utilizadas como um ponto de partida para a teoria de conjuntos" (OECE, 1961b, p. 15); ou, "Com a ajuda constante dos alunos, muitas aplicações serão descobertas: o conjunto dos alunos na aula, o conjunto dos dedos da mão" (p. 17); ou ainda, "Um modelo material (dando lugar à observação e à experiência) é a base a partir da qual podemos desenvolver a abstracção matemática" (p. 75).

volvimento de materiais; formação de professores e implementação dos programas" (Fey, 1978, p. 343).

Do ponto de vista interno à Escola e ao ensino da Matemática, evidenciam-se, na proposta de Royamont e na sua especificação de Dubrovnik, um propósito principal global e algumas orientações curriculares centrais. O propósito principal tinha em conta essencialmente a continuação de estudos dos alunos[1] e as necessidades do ensino superior, e visava acabar ou reduzir, o desfasamento que existia entre a Matemática dos programas das escolas secundárias e aquela que se estudava nas universidades. A este respeito, numa das conclusões gerais do seminário, a propósito do programa que foi aí delineado, é dito que esse programa "está em harmonia com as matemáticas universitárias modernas" (OECE, 1961a, p. 360).

Na verdade, logo na alocução inicial do seminário (Stone, 1961), é dito que a modernização então já realizada nos cursos universitários de Matemática dera origem a um "fosso" considerado em progressivo alargamento, entre a universidade e a Escola secundária, no que respeitava à Matemática ensinada, extraindo-se daí a seguinte ilação:

> "Que não fosse apenas por esta razão, não podemos esperar mais tempo para estudar de modo aprofundado a possibilidade de introduzir certas noções modernas no programa do ensino secundário. É indispensável fazê-lo se nós quisermos que os alunos estejam familiarizados, ao entrar para a universidade, com a forma de raciocínio matemático que deles depois esperaremos". (p. 17)

Jean Dieudonné, por sua vez, começou a sua intervenção, referindo, precisamente, o atraso do ensino secundário face ao universitário, relativamente ao conteúdo matemático dos cursos, sublinhando as necessidades do ensino superior: "para poder proporcionar um ensino matemático satisfatório, os professores da Faculdade são da opinião que os seus alunos do primeiro ano deverão estar

[1] No resumo e conclusões dos trabalhos do seminário, apesar de se afirmar que o ensino da Matemática, muito em especial no que se refere ao ensino secundário, "não pode ser exclusivamente orientado para a formação de futuros matemáticos"(OECE, 1961a, p. 109), reconhece-se que esses trabalhos se orientaram e desenrolaram tendo como preocupação primeira " a formação dos alunos aptos para os estudos universitários" (p. 109).

familiarizados com um certo número de técnicas elementares[1], cuja aprendizagem exige tempo e que são necessárias para adquirir novas noções" (Dieudonné, 1961, p. 32). Considerando os programas do ensino secundário sobrecarregados de tópicos inadequados e desactualizados face ao desenvolvimento da Matemática e ao que se ensina nas universidades, propõe que tais tópicos sejam retirados para que possa existir disponibilidade para aliviar "a Universidade do fardo que só ela (...) suporta" (p. 34). Também em propostas programáticas específicas é visível a preocupação com os interesses do ensino superior e a continuação dos estudos dos alunos, como quando se diz a propósito do ensino da Geometria: "Ao introduzir a Geometria vectorial o mais rapidamente possível, preparamos o aluno para os estudos universitários" (OECE, 1961a, p. 83). A importância que tal preocupação assumiu pode ainda inferir-se de um dos pontos das conclusões gerais do seminário, onde se considera que o programa delineado durante os trabalhos "está em harmonia com a Matemática universitária moderna" (p. 111).

Para a elaboração do programa de Dubrovnik (OECE, 1961b), foi claramente assumida a preocupação com os alunos mais dotados do ensino secundário[2], com o pressuposto de que estes alunos seriam os que mais facilmente se adaptariam aos novos assuntos matemáticos e a um ensino mais moderno, tendo sido acordado dedicar todo o tempo disponível aos temas considerados prioritários e sobre os quais deveriam incidir as principais transformações — a Álgebra, a Geometria e a Estatística. No entanto, para que esse programa pudesse ser "eventualmente acessível a todos os alunos" (p. 6), os autores pensaram concebê-lo de modo a que pudesse ser convenientemente adaptado, tendo em conta alunos com expectativas diferentes em termos de prosseguimento de estudos. Com esse objectivo, estabeleceram uma divisão etária da escolaridade secundária em dois ciclos: para o 1° ciclo (11-15 anos de idade), os programas foram

[1] Dieudonné refere-se aqui a tópicos como álgebra linear elementar, Geometria analítica, elementos de cálculo diferencial e integral, tendo acrescentado ainda o domínio da dedução lógica e "ter uma ideia" do método axiomático (Dieudonné, 1961, p. 32). No entanto, fez questão em salientar que a enumeração destes tópicos não quer dizer que a eles se reduzam os objectivos do ensino da Matemática no nível secundário, justificando a enumeração que fez por ter apenas em mente, no que iria expor, o que chamou "o problema estritamente prático da passagem dos estabelecimentos [de ensino] secundário para a Universidade" (p. 32).

[2] Na introdução do programa referido diz-se: "O grupo [de trabalho] decidiu dedicar-se mais particularmente à formulação de um programa adaptado à metade mais dotada dos alunos frequentando os liceus e os *gymnases*" (OECE, 1961b, p. 6).

elaborados para poderem ser sujeitos à modificações de modo a adaptarem-se a alunos de um "nível médio"; no 2° ciclo (15-18 anos) os programas foram elaborados tendo em vista a continuação de estudos e, sobretudo, os estudantes que escolhessem seguir estudos "mais avançados" (p. 6).

As orientações principais no que se refere ao currículo propriamente dito, incidiam principalmente sobre o seu conteúdo e estrutura, mas também sobre os métodos de ensino e assumiram muitas vezes o carácter de propostas e recomendações concretas.

Sobre os conteúdos curriculares e sua organização. Na proposta de Royamont (OECE, 1961a) ressaltam duas orientações principais relativas ao conteúdo e organização curricular para um novo programa de Matemática que, de uma forma sintética, podem ser assim enunciadas: por um lado, dar ênfase à unidade da Matemática e, por outro, introduzir novos tópicos e abordagens, ditos modernos, da Matemática. Estas orientações decorriam essencialmente do diagnóstico que então era feito relativamente à Matemática ensinada no ensino secundário e que, em poucas palavras se pode traduzir do seguinte modo: a constatação de um enorme atraso em relação ao estado do desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos da época e um desfasamento em relação ao que era ensinado nas universidades. Com base neste diagnóstico, as recomendações efectuadas traduziram-se sobretudo numa valorização da Álgebra e da Geometria vectorial, com a correspondente desvalorização da Geometria de Euclides[1], na orientação axiomática dada ao estudo da Matemática, e numa valorização da linguagem e simbologia matemáticas.

No que se refere à unidade da Matemática, nas conclusões do seminário assume-se que ela é um dos traços característicos da Matemática mais actual e, por essa razão, recomenda-se contrariar toda a separação rígida tradicional entre os diversos domínios matemáticos[2]. Considerando que "não é mais necessário

[1] A expressão Geometria de Euclides é usada com o significado de Geometria baseada nos axiomas de Euclides, para seguir a distinção que os autores do programa de Dubrovnik fazem entre essa expressão e a expressão Geometria euclidiana que reservam para designar o estudo do espaço euclidiano que não é abandonado no programa, seguindo, no entanto outra abordagem (OECE, 1961b).

[2] Importa, no entanto, chamar a atenção para que, paralelamente a esta recomendação é igualmente salientado que, nos anos mais iniciais do seu ensino, a unidade da Matemática só deve ser respeitada na medida em que decorra de um trabalho intuitivo prévio junto dos alunos,

que a Álgebra seja [estudada de forma] isolada e paralela à Aritmética, à Geometria, à Trigonometria, à Análise" (p. 115) defende-se, para o ensino secundário, um programa "unificado", um programa que "respeite a unidade da Matemática" (p. 115).

Na verdade, a concepção unitária da Matemática está subjacente em diversas intervenções no seminário sobre os aspectos curriculares da reforma, e tornou-se visível sob várias formas e em diversas propostas. Gustave Choquet, por exemplo, que interveio sobre o ensino da Aritmética, defende que, do ensino primário ao ensino secundário, "é importante não justapor Aritmética e Álgebra, mas, pelo contrário, fundi-las tão completamente quanto possível" (OECE, 1961a, p. 66). E, na proposta que apresentou, sustenta que tal objectivo pode ser conseguido, repare-se, através do estudo das estruturas matemáticas, elementos essenciais, como vimos, na concepção bourbakista da Matemática (Bourbaki, 1971) que as toma, simultaneamente, como a base da unidade desta ciência e elementos geradores dessa unidade. A importância dada às estruturas matemáticas, aparece também na alocução de W. Servais sobre o ensino da Álgebra, onde defende que, logo "no início do ensino secundário" (OECE, 1961a, p. 71), a Álgebra deve incidir sobre o estudo das estruturas, argumentando que estas constituem o seu verdadeiro objecto[1].

A valorização da unidade da Matemática e a tendência, no ensino, para uma diluição das fronteiras entre os diversos domínios matemáticos, pode ainda identificar-se quando, na sequência da intervenção de Servais, é dito, como síntese da discussão sobre Geometria dedutiva, que a maioria as propostas apresentadas apontavam no sentido de uma abordagem algébrica da Geometria, para substituir os métodos tradicionalmente utilizados no seu estudo. Esta ideia está igualmente presente na discussão das propostas de O. Botsch, inteiramente dedicadas à Geometria, quando é recomendado "realizar o mais depressa

e se ajuste, podemos dizer, às suas percepções espontâneas primordiais (também aqui, por certo, não será alheia a influência dos trabalhos de Piaget). Sobre esta questão, diz-se no relatório: "não é necessário respeitar, no iniciar [da aprendizagem] da Matemática, uma unidade que não resulte da intuição, nem das noções instintivas de quantidade e de espaço" (OECE, 1961a, p. 113).

[1] Cabe aqui a menção ao facto de que não houve acordo, no que se refere ao ensino das estruturas algébricas dos números como os grupos, anéis e corpos. A este respeito, na discussão subsequente à intervenção de Servais, a "maior parte" dos presentes consideraram preferível que essas ideias constituíssem uma orientação para o professor "mais do que [ideias a] serem estudadas sistematicamente no nível secundário" (OECE, 1961a, pp. 76-77).

possível [na escolaridade] a síntese entre a Álgebra e a Geometria" (OECE, 1961a, p. 85), para promover a transição das noções geométricas intuitivas do início da escolaridade, para as noções mais avançadas da Geometria abstracta.

Na mesma perspectiva, também no que diz respeito à Trigonometria é claramente defendido, como já foi referido, que ela não deve ser ensinada de forma independente e isolada das outras áreas do programa. "A Trigonometria, enquanto ramo autónomo dos estudos matemáticos, deve desaparecer do programa" (p. 121), diz-se nas conclusões do encontro, propondo-se o seu estudo, primeiro como uma parte da Geometria, depois da Análise (Funções) e, depois ainda associado ao dos números complexos.

O programa de Dubrovnik (OECE, 1961b) assume claramente as recomendações de Royamont no que se refere à unidade da Matemática: "importa (...) que um programa de ensino moderno saliente [a] unidade fundamental da Matemática" (p. 8). Propõe apenas três grandes temas, Álgebra, Geometria, e Probabilidades e Estatística, distribuídos pelos ciclos etários considerados. Sobre os dois primeiros, na introdução do programa afirma-se que esses temas não são apresentados isoladamente mas que, "pelo contrário, [são] valorizados no contexto das suas interrelações estreitas e indispensáveis a uma boa compreensão do assunto" (p. 8).

No que se refere aos novos tópicos e abordagens da Matemática, a sua introdução traduziu-se sobretudo, como já foi mencionado, numa valorização da Álgebra e da Geometria vectorial, concomitantemente com uma desvalorização da Geometria de Euclides, bem como na adopção de uma orientação axiomática para o ensino e a valorização da linguagem e simbologia matemáticas.

A Álgebra, na verdade, aparece nas recomendações programáticas de Royamont como um elemento unificador por excelência. É disto exemplo, a proposta de Choquet para o ensino da Aritmética, sustentando a "fusão" entre a Aritmética e a Álgebra, em seu entender possível de realizar com base no estudo das estruturas matemáticas. Ou as sugestões de uma abordagem algébrica da Geometria, onde podemos enquadrar a proposta de Botsch para o seu ensino, começando com o estudo das transformações geométricas e progredindo "passo a passo para a utilização mais geral dos grupos de transformações" (OECE, 1961a, p. 81) bem como as recomendações para o ensino da Geometria vectorial tão cedo quanto possível na escolaridade, com o objectivo de realizar, também cedo, a síntese entre a Álgebra e a Geometria.

Ainda relativamente à ênfase dada à Álgebra no ensino, Willy Servais, que se pronunciou sobre esta matéria, sustenta que apresentar o seu estudo como uma simples extensão generalizada da Aritmética dá uma visão distorcida daquele domínio matemático. Defende por isso que a Álgebra não se deve restringir ao campo numérico, logo no princípio do seu estudo nas escolas secundárias. Daí a sua proposta da introdução precoce do estudo da Álgebra dos conjuntos, justificada com o facto de que, com os conjuntos, é possível conseguir "desde o começo [que] o domínio da Álgebra não apareça limitado à Álgebra das operações numéricas" (OECE, 1961a, pp. 71-72). Esta proposta vem na linha da de Gustave Choquet cujo esboço de programa para a Aritmética no ensino secundário — onde "o professor (...) deve encetar um verdadeiro estudo da Álgebra" (p. 69) — se iniciava com a Álgebra de conjuntos.

Servais propõe o estudo da teoria dos conjuntos e defende que estes devem tornar-se familiares aos alunos tão cedo quanto possível. Sugere que os conjuntos servem para a introdução de noções da lógica elementar, cujo conhecimento "sem excesso", considera "ser uma das componentes importantes da vida intelectual e [que] poderá servir de base para os estudos matemáticos" (OECE, 1961a, p. 71). Também propõe introduzir a noção de função com base na teoria dos conjuntos e igualmente logo no início do ensino. Deste modo, para Servais, considerando como pré-requisitos as noções de conjunto, de função, de produto cartesiano, de relações e de operações, "a Álgebra desempenhará, na Matemática, o papel que cada vez mais se lhe reconhece" (p. 74).

A par da valorização da Álgebra, vem a adopção da Geometria vectorial com a correspondente desvalorização da Geometria de Euclides. Sobre esta matéria, coube a Jean Dieudonné (1961) o papel principal, tendo ficado célebre a sua afirmação "Abaixo Euclides", por ele próprio assumida como emblema das ideias que defendeu: "Se eu quisesse resumir numa frase todo o programa que tenho em mente, fá-lo-ia com o *slogan*: Abaixo Euclides!" (p. 37). Na verdade, Dieudonné manifestou-se muito crítico face ao ensino da Geometria que então se praticava, nomeadamente no que se refere à chamada Geometria dos triângulos, mas a proclamada 'rejeição' de Euclides, não significava, em seu entender, uma desvalorização da Geometria, do seu lugar e do seu papel no ensino secundário. "Ainda que vos possa parecer que critiquei severamente a Geometria", disse no final da sua intervenção, "não tenho a intenção de diminuir a sua importância" (p. 46). Reconhecendo que uma das finalidades do ensino ao nível secundário é a formação e desenvolvimento, nos alunos, da intuição do espaço, Dieudonné chama a atenção que as suas críticas visavam principalmente os métodos do ensino da Geometria e, em particular, a utilização da noção de triângulo como base desse ensino, reclamando o seu abandono, a preencher pela noção de vector, em seu entender, uma noção mais útil e fecunda:

> "As minhas críticas visam portanto, não a finalidade mas os *métodos* do ensino da Geometria; afirmo sobretudo que seria muito melhor basear este ensino, *não* em noções e resultados artificiais que, na maior parte das aplicações não têm nenhuma utilidade, mas em noções fundamentais que dominam e esclarecem todas as questões onde a Geometria intervém. No momento em que, por exemplo, a noção de *vector* tem uma importância capital em toda a ciência moderna, a noção de *triângulo* é artificial e não tem praticamente nenhuma aplicação". (p. 47, itálicos no original)

A crítica de Dieudonné, para além de incidir na utilização dos triângulos como base do ensino da Geometria, reportou-se também aos aspectos que considerava pouco rigorosos desse ensino. A este respeito, critica o facto das noções fundamentais como ponto, recta, ângulo e outras "não serem nunca definidas de uma forma axiomática rigorosa", acrescentando que essas noções eram apresentadas "fazendo directamente apelo à intuição, embora a sua relação exacta com os objectos físicos que, supostamente, idealizar não fosse nunca exposta muito claramente" (p. 37). No que se refere aos triângulos, Dieudonné considera-os completamente inúteis e dispensáveis no quadro de uma Geometria moderna[1] e, referindo-se à escolaridade antes dos catorze anos e às iniciativas de ensinar a Geometria como se fosse uma parte da Física, diz:

> "Penso que estas iniciativas são de encorajar fortemente, desde que se dê ênfase, não a brinquedos artificiais como os triângulos, mas a noções fundamentais como as simetrias, translações, produtos de transformações, etc.." (p. 41)

[1] Diz Dieudonné: "Os triângulos (...) têm tanta relação com aquilo que fazem actualmente os especialistas da Matemática pura e aplicada, como os quadrados mágicos ou os problemas de xadrez" (Dieudonné, 1961, p. 36).

Podemos ver também nesta afirmação de Dieudonné, a ideia de uma abordagem vectorial para o ensino da Geometria. Esta ideia que atravessa todo o esboço de programa que propôs, foi retomada em outras intervenções e retida nas conclusões do seminário[1]. Recomenda-se nestas conclusões que a Geometria euclidiana, tal como era apresentada nas escolas, deveria sofrer uma grande transformação e, nos casos onde não fosse adoptado um programa inteiramente baseado na Geometria vectorial, sugere-se a alteração dos programas em vigor de modo a que pudessem ser introduzidos os métodos algébricos e os vectores. Retomando também a questão da Geometria dos triângulos, embora reconhecendo que o estudo das propriedades destes polígonos "são muito cómodas para familiarizar o aluno com a natureza do raciocínio dedutivo" (OECE, 1961a, p. 120), conclui-se que:

> "Se se introduz os métodos dedutivos no ensino da Álgebra, torna-se possível que este conhecimento sirva o ensino da Geometria. A igualdade de triângulos perde por conseguinte a sua importância e as noções das isometrias (...) tornam-se primordiais." (p. 120)

Podemos pois dizer, em jeito de síntese, sobre as orientações e propostas incidindo sobre o conteúdo e organização curriculares emanadas de Royamont que a valorização da Álgebra penetra também a Geometria. A Geometria das transformações — substituindo a Geometria dos triângulos — e a Geometria vectorial em todo o seu desenvolvimento, correspondem a uma algebrização da Geometria. Isto responde, como é sublinhado nas últimas conclusões do seminário, à necessidade de que "esses assuntos sejam ensinados no seu encadeamento lógico, mais profundo e com mais rigor (...) [e] exige igualmente um ensino tão precoce quanto possível das relações que unem a Geometria à Álgebra — particularmente a Álgebra linear e vectorial" (OECE, 1961a, p. 128-129). Da

[1] As ideias apresentadas por Dieudonné não foram no entanto consensuais, tendo inclusivamente dividido os participantes no seminário: "a comunicação do professor Dieudonné foi simultaneamente aprovada por alguns participantes e acolhida com sérias reservas por outros" (OECE, 1961a, p. 47). O debate que se gerou deu origem a um acordo em favor da manutenção de alguns aspectos da Geometria euclidiana, por se reconhecer que muitos conceitos matemáticos necessitam do suporte de uma representação geométrica. O próprio triângulo foi defendido com base em razões históricas e na sua importância nas aplicações em ciência e na vida corrente, e também por favorecer uma abordagem intuitiva da Geometria que se reconheceu ser importante no início do seu estudo. Foi também salientado que a Geometria formal euclidiana era até então "a principal disciplina que habitua os alunos aos métodos do pensamento dedutivo" e que se mantinham válidos, a este propósito, muitos dos seus aspectos.

ênfase na Álgebra, decorre também a ideia da introdução precoce da teoria de conjuntos e a valorização da linguagem matemática e da sua simbologia própria. Dieudonné (1961), por exemplo, mesmo estando a referir-se ao que chamou de matemáticas experimentais (no sentido de pré-dedutivas ou pré-axiomáticas), chama atenção para que "se deve introduzir logo que possível a linguagem e as notações" (p. 41) cuja utilização era já generalizada na Matemática. E, nas conclusões do seminário é dito sobre os símbolos associados à teoria de conjuntos, que eles devem ser apresentados tão cedo quanto possível[1], seguindo-se-lhes os símbolos lógicos, justificando-se a sua utilização, do seguinte modo:

> "Estes símbolos e a sua utilização darão um novo rosto à Matemática escolar. Não está aí, no entanto, o fim visado. Os símbolos são necessários, porque eles representam conceitos que dão ao pensamento mais clareza e mais precisão, e porque ligam e unificam os conceitos matemáticos para o aluno que os vê reaparecer em cada um dos ramos estudados. Além do mais, eles são indispensáveis mais tarde nos estudos matemáticos universitários". (p. 117)

O programa elaborado em Dubrovnik (OECE, 1961b) incorpora muitas das orientações e propostas saídas de Royamont. Os dois temas principais são, precisamente, a Álgebra e a Geometria, distribuídos por dois ciclos, começando o da Álgebra, no 1° ciclo (11-15 anos), pela teoria de conjuntos e incluindo, apesar das discordâncias manifestadas em Royamont (ver nota 1, p. 105), as noções de grupo, anel e corpo, embora sem a pretensão de "um estudo sistemático ou formal" (p. 73). No 2° ciclo, o programa de Álgebra prolonga e aprofunda a teoria de conjuntos até aos espaços vectoriais, aplicações lineares e matrizes. Em relação à Geometria, o programa distancia-se da abordagem tradicional da Geometria euclidiana e propõe uma abordagem algébrica:

> "O programa proposto para o ciclo marca um abandono do curso tradicional em Geometria (...). Hoje em dia, a Geometria engloba todos os aspectos do espaço, tratados quer do ponto de vista do número (Álgebra), quer como conjunto de pontos, de rectas, etc.. Os métodos de síntese de Euclides serão consequentemente reforçados pelas técnicas que têm em conta o poder da Álgebra". (p. 74)

[1] Também neste caso é referido que as sugestões que foram feitas não receberam unanimidade entre os participantes.

É assim proposto o estudo sistemático das transformações geométricas iniciado com a introdução das noções de vector, ângulo e simetria, seguindo-se o estudo das outras transformações. O programa do 2° ciclo prossegue o estudo mais aprofundado das transformações e grupos de transformações e da Geometria afim, culminando com o estudo axiomático que se estende aos espaços métrico euclidiano, afim e vectorial[1].

Sobre os métodos. Como atrás foi mencionado, a reforma da Matemática Moderna de Royamont e Dubrovnik, tendo em conta a sua aplicação e desenvolvimento nos anos que se seguiram, veio a ficar conhecida como uma reforma que incidia sobretudo nos conteúdos matemáticos e, na verdade, as suas consequências foram mais profundas e duradouras nesta vertente[2]. No entanto, como também já foi dito, para além da revisão dos conteúdos matemáticos e da sua organização curricular, mudar os métodos de ensino então praticados era um propósito explícito, com uma visibilidade significativa em muitas das suas orientações e propostas. Na verdade, existem aspectos de natureza metodológica distintivos da reforma da Matemática Moderna que se apresentam sob a forma de grandes perspectivas, princípios gerais ou abordagens de carácter global. É o caso da ênfase na unidade da Matemática e em conceitos unificadores como as estruturas matemáticas, bem como da orientação axiomática e dedutiva subjacente à organização curricular proposta e a correspondente valorização da linguagem e do rigor matemáticos. É também o caso da proposta de uma abordagem algébrica quer para Aritmética, quer para a Geometria.

[1] Para além da Álgebra e da Geometria, são também propostas a Estatística e as Probabilidades como terceiro grande tema para o ensino secundário. Em Royamont foi reconhecida a importância da inclusão do seu estudo que, no entanto, não parece ter sido aí objecto de reflexões muito aprofundadas e desenvolvidas. O programa de Dubrovnik começa com as noções básicas da teoria das probabilidades e da Estatística descritiva, prosseguindo com o estudo mais aprofundado da primeira, incluindo um esboço de uma axiomática, e com o estudo da Estatística inferencial. Há no programa uma diferenciação do 2° ciclo entre ramo não científico e ramo científico, propondo-se neste último temas como os axiomas da teoria das probabilidades, teoria das probabilidades condicionais e a distribuição de Poisson (OECE, 1961b).

[2] Por exemplo, Zalman Usiskin, analisando a situação nos Estados Unidos da América em 1985, afirma que enquanto muitos aspectos de carácter metodológico associados à reforma da Matemática Moderna se tinham entretanto perdido, "na grande maioria das escolas" a estrutura e o conteúdo curricular do ensino da Matemática ainda reflectia as orientações e propostas daquela reforma (Usiskin, 1985, p. 2).

Para além disso, entre recomendações e propostas, existem também orientações metodológicas de uma outra natureza, mais próximas, por assim dizer, do acto de ensino, do papel do professor e do aluno, e das actividades de aprendizagem. É o caso, por exemplo, da valorização da compreensão face à mecanização ou aos aspectos mais repetitivos ou rotineiros no ensino da Matemática, da importância dada à aprendizagem por descoberta, e do valor atribuído à intuição e ao rigor. No que diz respeito à questão da mecanização, Gustave Choquet, por exemplo, diz que já era altura "de não mais sobrecarregar os alunos com longas multiplicações e divisões" (OECE, 1961a, p. 68). Em contrapartida, valoriza o exercício de cálculos mentais simples e a estimação, e sugere a utilização da máquina de calcular[1] quer para a realização dos cálculos mais complexos, quer para o cálculo de raízes quadradas. Na proposta programática elaborada na sequência das recomendações de Royamont (OECE, 1961b), é também dito que, embora seja de esperar algum domínio do cálculo no final do 1° ciclo (11-15 anos), é de evitar "a perda de tempo que resulta dos longos cálculos numéricos e das acrobacias algébricas" (pp. 10-11), sendo recomendada a ênfase nas operações e suas propriedades.

Ainda sobre esta mesma questão, a valorização da compreensão pode ser vista, por exemplo, quando, nas conclusões do seminário, se critica o modo "rotineiro e mecânico" (OECE, 1961a, p. 113) com que a Aritmética até então era ensinada, visando essencialmente a memorização de regras e factos, e é recomendado que a sua aprendizagem resulte "de uma compreensão nascida de uma experimentação bem conduzida e de uma tomada de consciência pessoal, na maior parte das vezes depois da manipulação de objectos materiais de um género ou de outro" (p. 113).

A referência à ao trabalho experimental aparece também com frequência como recomendação metodológica, ainda que entendida de modos diferentes: como manipulação de objectos ou outros materiais concretos, como elaboração de esquemas ou gráficos[2] e até como experimentação com números. Este último

[1] Cabe aqui dizer que um dos pontos de desacordo que é retido nas conclusões do seminário diz precisamente respeito à máquina de calcular cuja utilização, para substituir o cálculo manual, não foi consensual entre os participantes.

[2] Servais recomenda, entre outras coisas, o recurso à representação gráfica de funções para tornar a sua noção "viva e activa" (OECE, 1961a, p. 73).

tipo de experimentação, sublinhe-se, é considerado um elemento inovador pelos autores do programa de Dubrovnik (OECE, 1961b):

> "Um traço dos programas sugeridos, que deve ser encarado como uma inovação, é insistir na utilização das técnicas experimentais no estudo da Aritmética. Esquecemo-nos demasiadas vezes do facto de que podemos fazer experiências com números[1] do mesmo modo que as fazemos com as figuras concretas da Geometria". (p. 11)

No que diz respeito à utilização de materiais, Choquet, por exemplo, referindo-se ao ensino da Aritmética, menciona o material de Cuisenaire, e Botsch, falando do ensino da Geometria, recomenda que este se deve iniciar com o estudo de objectos concretos e trabalhos manipulativos como a dobragem, o corte e a colagem[2] (OECE, 1961a). E, a introduzir o programa de Geometria do 1° ciclo (OECE, 1961b), os autores apresentam como um dos três princípios importantes que orientam esse programa o seguinte enunciado: "um modelo material (dando lugar à observação e à experiência) é a base a partir da qual se pode desenvolver a abstracção matemática" (p. 75).

Neste tipo de recomendações, podemos ver também, para além do apoio à compreensão na aprendizagem, uma valorização do papel do aluno e, igualmente, da componente de descoberta nessa aprendizagem que alguns autores encontram na reforma da Matemática Moderna (Fey, 1978; Usiskin, 1985). Esta valorização é mais explícita e visível no programa de Dubrovnik, do que nas intervenções em Royamont[3]. Por exemplo, na introdução à Álgebra do 1° ciclo (11-15 anos), e aludindo ao estudo das noções de grupo, anel e corpo, é dito que não se pretende que elas sejam introduzidas de uma maneira "teórica e formal", mas que, "pelo contrário, os professores são encorajados a deixar os seus alunos

---

[1] Para explicar o seu entendimento destas experiências, os autores remetem para tarefas do tipo: "23 + ? = 71, __ x 50 = 600, 80 (50+___) = 6400"; ou, tarefas como, dados "20 x 30, 21 x 29, etc., o que observamos? que se pode dizer de 40 x 50, 41 x 49 etc.? Mais genericamente: (10n + a) (10 (n + 1) - a) = ?" (OECE, 1961b, p. 67).

[2] Relativamente à utilização de materiais, um outro ponto de desacordo entre os participantes que mereceu registo nas conclusões finais do seminários foi "o abuso dos cubos, dos *pausinhos* e dos *coloridos*" (OECE, 1961a, p. 115, em itálico no original).

[3] Todavia, em Royamont, Servais, por exemplo, sobre a introdução da álgebra de conjuntos diz: "mais do que expor aos alunos as propriedades da álgebra dos conjuntos, faremos que eles as descubram" (OECE, 1961a, p. 72), sugerindo a utilização de manipulações e de exemplos de aplicação prática.

descobrir [essas] noções" (OECE, 1961b, p. 10). É, aí, também referido que as tarefas propostas não se devem resumir a exercícios ou problemas de aplicação directa dos conhecimentos adquiridos, mas constituírem tarefas que "façam apelo ao interesse do aluno, ao seu gosto, ao seu desejo de investigação e que desenvolvam as [suas] faculdades de análise e de invenção" (p. 11). A seguinte consideração no programa de Álgebra do 2º ciclo (15-18 anos) tem o mesmo sentido de valorização do papel do aluno e da descoberta na aprendizagem:

> "Para ajudar o aluno a fazer as abstracções que caracterizam a Álgebra deste ciclo, é necessário apresentar-lhe não só um grande número de exemplos (e de contra-exemplos), mas também de exercícios do tipo 'descoberta' que desenvolvem no aluno uma predisposição para a investigação". (p. 109)

À menção ao trabalho experimental, nos vários sentidos acima referidos, podemos também associar o reconhecimento da importância da intuição e do seu papel na aprendizagem. Este reconhecimento é visível em Dieudonné (1961), por exemplo, no primeiro dos dois princípios directores que enunciou antes da apresentação do seu esboço de programa, relacionado, justamente, com o papel da intuição na aprendizagem:

> "Não podemos desenvolver frutuosamente uma teoria matemática sob a forma axiomática senão quando o aluno está já familiarizado com a questão à qual ela se aplica, trabalhando durante algum tempo numa base experimental ou semi-experimental, isto é, *fazendo constantemente apelo à intuição*". (p. 40, itálico no original)

A recomendação de uma abordagem intuitiva contida neste princípio surge em diversas intervenções no seminário associada à ideia de que os aspectos mais abstractos e formais na aprendizagem da Matemática devem ser precedidos por um trabalho de base intuitiva. Para Dieudonné (1961) este trabalho deve estar presente durante todo o ensino secundário — "em todo o programa [apresentado] tive o cuidado de não introduzir nenhuma noção matemática que não tivesse uma interpretação intuitiva imediata de qualquer natureza" (p. 46) — e refere-se a esse tipo de trabalho como sendo o que distingue a Matemática neste nível de ensino, da Matemática no ensino superior[1].

Na mesma linha, Bostch recomenda que a Geometria dedutiva deve ser precedida por um estudo com base na observação e manipulação de objectos e materiais diversos (OECE, 1961a). Esta recomendação é uma das que consta nas conclusões gerais do seminário: "o ensino da Geometria dedutiva nas escolas secundárias deve ser baseado numa experiência prévia satisfatória da Geometria intuitiva ou física" (p. 129), e também no programa de Geometria para o 1° ciclo (OECE, 1961b). Aqui aparece, por exemplo, sob a forma do princípio orientador que remete para a necessidade e importância da observação e da experiência em torno de objectos e materiais concretos, consideradas como base para o desenvolvimento da abstracção matemática por parte dos alunos e que acima já foi enunciado[2].

O segundo dos princípios directores que Dieudonné apresentou, diz respeito, à questão do rigor no ensino da Matemática:

> "Uma vez introduzida a dedução lógica numa questão matemática, devemos sempre apresentá-la com uma honestidade rigorosa, isto é, sem dissimular as lacunas e os defeitos do raciocínio" (p. 40).

Como vimos, Dieudonné criticou de forma contundente a maneira como a Geometria era à época ensinada. No que diz respeito à questão do rigor, por exemplo, aponta o facto de nesse ensino nunca se definirem rigorosamente as noções básicas (ponto, recta, ângulo...) e de em nenhum momento ser enunciado um conjunto completo de axiomas. Assim, refere-se a esse ensino como utilizando conjuntos de definições que "nada definiam" e de "pseudo demonstrações" (p. 40), e considera que seria preferível que se enfrentasse a real dificuldade de, ao nível elementar, conseguir um estudo axiomático rigoroso, do que proceder ao que chamou de "escroqueria intelectual" (p. 40).

[1] É no entanto de referir que Dieudonné, considerando que a partir dos quinze anos é já possível o enunciado dos axiomas (para a Geometria dedutiva), afirma que, a partir dessa idade: "O estudo experimental da Matemática nos estabelecimentos do ensino secundário, para falar propriamente, está terminado" (Dieudonné, 1961, p. 44).

[2] Esta preocupação com uma abordagem intuitiva no ensino da Matemática, associada à observação, experimentação, manipulação de objectos e materiais, está presente sobretudo nos programas para o 1° ciclo (11-15 anos), não assumindo visibilidade significativa nos programas do 2° ciclo (15-18 anos).

Esta preocupação com o rigor, permeia muitas das orientações e propostas do seminário de Royamont[1], embora seja particularmente visível em Dieudonné (1961), cujo esboço de programa que apresentou é todo ele orientado numa perspectiva de um estudo axiomático da Matemática (ainda que com as recomendações relativas à necessidade de um trabalho experimental e intuitivo prévio, já mencionadas). Esta perspectiva foi preponderante no seminário, embora com o reconhecimento de que o estudo axiomático rigoroso não é possível até certa idade dos alunos (16 anos). Em Geometria, por exemplo, na sequência da comunicação de Botsch que incidiu sobre a Geometria das transformações, é recomendado que até essa idade "todo tratamento axiomático deverá permanecer implícito e não formal" (OECE, 1961a, p. 84). No entanto, repare-se, segundo os intervenientes na discussão, no que diz respeito à Geometria vectorial, o seu tratamento axiomático implícito implica que o professor "em nenhum momento deve deixar de apresentar a Matemática sob uma forma axiomática" (p. 84). No caso da Análise, assume-se num dos pontos das conclusões que, no ensino secundário, nem sempre é possível um estudo rigoroso, insistindo-se todavia que, mesmo em situações em que isso aconteça, esse "ensino deverá ser correcto" (p. 122) e os alunos alertados para eventuais lacunas em demonstrações[2].

Em síntese. A Matemática Moderna nasceu num contexto do pós-guerra e foi motivada por um lado, por razões exteriores à Escola e ao ensino, em particular de ordem social, dada a necessidade de uma maior e melhor formação matemática dos cidadãos em geral que, como era então reconhecido, a evolução económica, científica e tecnológica em muitos países, exigia. Por outro lado, por razões internas relacionadas sobretudo com o grande desenvolvimento da Matemática e com o desfasamento, face a este desenvolvimento, dos programas desta disciplina do ensino não superior. Foi, por isso, ganhando corpo a necessidade e a urgência de uma transformação no ensino da Matemática, essencial-

[1] Nas conclusões do seminário, no resumo dos argumentos que justificavam a reforma, um dos pontos salientados diz concretamente o seguinte: "As novas exigências de rigor e de clareza dos enunciados matemáticos (...) fazer emergir a necessidade de rever os conceitos sobre os quais repousa confusamente a apresentação clássica da Matemática" (OECE, 1961a, p. 112).

[2] A este propósito, é dito que neste nível de ensino os alunos deverão ser perfeitamente capazes de distinguir uma prova formal de uma ilustração intuitiva.

mente com um propósito de fundo, a sua modernização. Pretendia-se uma Matemática nova[1] nas escolas e por isso se pugnava pela actualização dos conteúdos ensinados e da sua organização no currículo, bem como pela modificação dos métodos de ensino praticados para que estivessem mais de acordo com os conhecimentos da época, particularmente da Psicologia, sobre a aprendizagem e desenvolvimento.

Com razões referidas, representantes de vários países da Europa e da América do Norte acreditaram poder conceber uma proposta para lançar as bases da reforma pretendida e envolveram-se na sua elaboração com convicção e entusiasmo. As orientações e propostas que resultaram do trabalho efectuado vieram a ser muito influenciadas pelos matemáticos presentes e pelos interesses do ensino superior. Essa influência traduziu-se numa preocupação dominante com os alunos "mais dotados" e com a continuação dos seus estudos e, por isso, em ajustar a Matemática do ensino secundário às necessidades do ensino superior e à Matemática aí ensinada[2]. A dominância dos matemáticos universitários é também vista como estando na origem do privilégio atribuído à Matemática pura, em particular à axiomática e aos conceitos unificadores, como, por exemplo, a teoria de conjuntos e estruturas matemáticas (Kilpatrick, 1997).

A proposta emanada de Royamont e Dubrovnik tem a nítida marca de uma concepção estruturalista da Matemática de inspiração bourbakista, com as implicações correspondentes no que se refere à Matemática para ser ensinada no ensino secundário: a ênfase na unidade da Matemática (a ideia da "fusão" Aritmética/Álgebra e da "síntese" Álgebra/Geometria, a integração da Trigonometria em outros tópicos ao longo do currículo); a importância dada à Álgebra e à Geometria vectorial, bem como às estruturas matemáticas; a orientação axiomática do ensino, isto é, a organização do currículo tendo como última meta

[1] *Mathématiques Nouvelles* era, significativamente, o título do livro com os programas de Matemática que foram elaborados em Dubrovnik (OECEb, 1961).

[2] Cabe aqui dizer que, na controvérsia que se seguiu à comunicação de Dieudonné, foi reconhecido que o ónus do desfasamento entre o ensino secundário e o praticado nas universidades não deveria recair apenas no primeiro, salientando-se que, aparentemente, "o único meio de preencher esse fosso será melhorar o ensino e os programas de cada lado dessa fenda" (OECE, 1961a, p. 49). Além disso, considerando que é na universidade que os professores são formados, recomenda-se que ela deve ter em conta esse público específico nos cursos que propõe.

o estudo axiomático da Matemática; a preocupação com o rigor e com a linguagem e simbologia matemáticas.

O conteúdo e organização curriculares são o ponto forte da Matemática Moderna tal como ela foi proposta. Foi o que, de um modo geral, mais penetrou nos programas reformados e, talvez por esta razão, a Matemática Moderna é considerada como uma reforma centrada nos assuntos matemáticos. Todavia, existia também, como vimos, não só o propósito de modificar os métodos de ensino, como recomendações explícitas nesse sentido, como é o caso, da valorização da abordagem intuitiva como condição para o estudo abstracto e formal da Matemática, a valorização da compreensão face à mecanização no ensino, a importância reconhecida ao papel do aluno, nomeadamente, pelo valor atribuído à aprendizagem por descoberta. Em relação à utilização de tecnologia foram feitas poucas referências — utilização do cinema e da televisão (Stone, 1961a), uso da máquina de calcular — que, tal como as aplicações da Matemática, que também mereceram alguma atenção em Royamont (Tucker, 1961), não vieram a ter qualquer consequência na elaboração do programa de Dubrovnik.

Zalman Usiskin (1985) apelida de revolução o movimento reformador da Matemática Moderna e os seus próprios mentores reconheceram em Royamont que o que estavam a propor era um programa *"passablement révolutionnaire"* (OECE, 1961a, p. 111). Mas se estavam optimistas relativamente à sua concretização generalizada, tinham também a consciência que, como é dito quase no final do relatório do seminário de Royamont, era preciso "realizar a reforma por uma evolução e não por uma revolução" (p. 131). De qualquer modo, a Matemática Moderna terá sido, certamente, a primeira grande reforma no ensino da Matemática no século XX e, porventura, a última a merecer grande consenso, em termos da sua necessidade e urgência, e grande adesão a nível internacional, independentemente da diversidade das suas concretizações.

A sequela da Matemática Moderna, novas perspectivas para a renovação do ensino da Matemática

A proposta de Royamont para uma Matemática nova nas escolas secundárias, bem como o seu desenvolvimento e especificação no programa de Dubrovnik, lançaram um movimento reformador no ensino da Matemática que assumiu um carácter verdadeiramente internacional atingindo muitos países, particularmente do chamado mundo desenvolvido, com consequências que, em muitos casos, perduraram para além dos anos oitenta. Isto, independentemente do facto de, ao longo dos anos que se seguiram ao seu lançamento, as concretizações e desenvolvimentos nos diversos países serem, em muitas situações, bastante diferenciados, o que, por vezes, também aconteceu num mesmo país (Howson, Keitel e Kilpatrick, 1981; Moon, 1986; NACOME, 1975).

No caso dos Estados Unidos da América, por exemplo, desde os finais dos anos cinquenta, foram levadas a cabo experiências de desenvolvimento curricular com abordagens muito distintas, desde as que seguiam de perto muitas das ideias fortes da reforma da Matemática Moderna, a outras que se desenvolveram segundo perspectivas em alguns aspectos contrastantes com essa reforma ou valorizando vertentes que ela não contemplou ou deu pouca ênfase[1]. No primeiro caso, podemos incluir os trabalhos do *School Mathematics Study Group*, dirigido por Edward G. Begle, vindo já do final dos anos cinquenta — "provavelmente o maior projecto sobre o currículo de Matemática naquela época" (Howson, 1981, p. 13). De grande divulgação e influência, este projecto, entre outras características, tinha como "incidência principal (*focus*) o conteúdo", os conjuntos eram "um conceito unificador", e, as propriedades das operações assumiam um lugar de relevo (Blij, Hilding e Weinzweig, 1980, p. 45). A ideia do método de descoberta "embora adorada e apreciada (...) era vista como difícil de concretizar e omitida dos textos e guias" (Vogeli, 1976, p. 9).

Entre as experiências desenvolvidas nos Estados Unidos da América com perspectivas e propósito diferentes das anteriores, podemos incluir projectos de

---

[1] Analisando a situação dos Estados Unidos da América, diz-se no relatório do NACOME (1975): "na verdade, [o fenómeno da Matemática Moderna] diz respeito a duas décadas (1955-1975) de desenvolvimentos que tiveram um impulso e uma direcção comuns, mas que brotaram de muitas raízes, assumiram muitas formas diferentes e mesmo contrastantes, e sofreram evoluções e modificações levando ao desaparecimento de certos aspectos e ao aparecimento de novos" (p. 21).

pendor fortemente comportamentalista como o projecto da universidade de Maryland, dirigido por Robert B. Gagné, que procurou "desenvolver uma hierarquia completa dos objectivos matemáticos [de índole] *behaviourista* e traduzi-los em currículos de aprendizagem programada" (Howson, 1981, p. 140), e outros de índole cognitivista, como o *Madison Project*. Este projecto, orientado por Robert B. Davis, desenvolveu experiências de sala de aula seguindo as ideias de Piaget e Bruner "para explorar o modo como o interesse e a actividade matemáticos, a criatividade e a descoberta eram melhor desenvolvidos" (p. 161). O projecto *Madison*, também dos finais da década de cinquenta, valorizava a aprendizagem por descoberta, conferindo especial relevo à utilização de materiais e ao aluno como elemento "activo" no processo de aprendizagem, significando isto "a inclusão de actividades tais como a resolução de problemas, a argumentação, a crítica (...) a medida, a estimação, ou a realização de uma experiência" (Davis, 1970, p. 29).

Na Europa, do mesmo modo, existiram concretizações diversificadas da reforma da Matemática Moderna. Concretizações ortodoxas das ideias dos proponentes dessa reforma, e que acentuavam a sua vertente mais abstracta e formal como, por exemplo, os casos do novo currículo francês decorrente dos trabalhos da comissão liderada por André Lichnerowics (Magnier, 1980) e a reforma de Kolmogorov na URSS (Keitel, 1982). O caso belga, também sensivelmente nesta linha, deu muita ênfase à manipulação de materiais no ensino elementar — de Cuisenaire (barras), de Dienes (blocos lógicos), de Papy (grafos com o uso da cor e o que era chamado de mini-computador de Papy) (Papy, 1970). Em Itália, sob o impulso de Emma Castelnuovo, foram também utilizados materiais mas de outra natureza: "materiais concretos construídos pelos próprios alunos" (Servais, 1975, p. 52).

Em Inglaterra, desenvolveram-se projectos que, embora inseridos no âmbito Matemática Moderna, foram, como dizem Howson, Keitel e Kilpatrick (1981), "temperados pelas características dos britânicos" (p. 172). É exemplo o *School Mathematics Project* de grande influência — "o projecto mais importante na Grã-Bretanha" (Griffiths e Howson, 1974, p. 141) — que deu muita ênfase às aplicações da Matemática. Para este projecto, "a intenção principal não era preparar os alunos para a Universidade, mas iniciá-los nas aplicações modernas da Matemática" (Howson, 1981, p. 173), em geral muito pouco contempladas nas reformas de outros países.

Ora, mesmo tendo em conta a diversidade de concretizações no quadro da Matemática Moderna, se a intenção reformadora consubstanciada nas propostas programáticas de Royamont e Dubrovnik gerou, em muitos países, modificações importantes no conteúdo e estrutura do currículo de Matemática, a estas modificações, de um modo geral, não correspondeu a melhoria esperada no sucesso escolar, não só ao nível da aprendizagem das técnicas e processos matemáticos, mas também na promoção da compreensão matemática.

Numa análise do modo como evoluiu a situação no ensino da Matemática na Europa desde o lançamento da Matemática Moderna em Royamont até meados dos anos setenta, Bent Christiansen (1975) divide este período em três fases. Uma primeira fase, que caracteriza como de "inovação optimista" (p. 7) e que situa nos anos entre 1960 e 1967, fazendo-a corresponder ao período em que, nos diversos países[1], foram estabelecidos os novos currículos e elaborados os novos livros de texto e materiais de ensino, na sequência das propostas da Matemática Moderna[2]. Uma segunda fase que se seguiu a este optimismo generalizado e que o autor circunscreve aos anos entre 1966/67 e 1971/72, caracterizando-a por um lado, pela tomada de consciência das "dificuldades relacionadas com o processo de implementação"[3] (p. 8), e, por outro lado, pelo delinear de acções visando ultrapassar os problemas criados por essas dificuldades. Entre esses problemas, Christiansen destaca o facto de que, se a mudança

[1] No período entre 1960 e 1967, realizaram-se várias experiências no âmbito da Matemática Moderna em muitos países da Europa e estabeleceram-se os novos currículos para o ensino da Matemática, por exemplo na Áustria (1960), Inglaterra (1961), Bélgica (1963), Itália e Polónia (1963), Checoslováquia (1965), URSS (1966) e França (1967) e o mesmo aconteceu na RFA e na Irlanda, mas em 1968 (Matos, 1988).

[2] Christiansen destaca o facto de que, neste período, o maior interesse incidiu na mudança do conteúdo matemático dos programas, destacando, em particular, o lugar e a importância que a teoria de conjuntos, a lógica e os aspectos de linguagem assumiram. Em seu entender, a forma generalizada como estes assuntos penetraram nas reformas nos diversos países e o facto de serem uma novidade quer para os professores quer para o público em geral, contribuiu para uma identificação da Matemática Moderna com a teoria de conjuntos.

[3] Entre os problemas que a implementação da Matemática Moderna teria que enfrentar, alguns dos quais tinham sido já antecipados em Royamont (OECE, 1961a), Willy Servais (1975), numa análise da evolução da reforma em vários países europeus, realizada no mesmo ano da de Christiansen, menciona a falta de professores, a necessidade de melhorar os materiais de ensino, a necessidade de investigação em educação matemática e a formação de professores.

dos conteúdos matemáticos e a sua forma de apresentação nos programas foram conseguidas, o mesmo não aconteceu relativamente aos métodos propostos[1]. A este propósito diz o autor: "a abordagem pedagógica permanece em larga medida tradicional com uma ênfase na aprendizagem mecânica (*rote-learning*) e no treino (*drill*) dos (novos) procedimentos padrão" (p. 8). Para fazer face aos problemas que surgiam, são propostas "uma ênfase acrescida na aprendizagem *versus* ensino da Matemática", "dar menos ênfase aos conteúdos matemáticos (*mathematical content*) em favor das actividades matemáticas" e "uma abordagem mais ampla (orientada numa perspectiva mais didáctica) na formação de professores" (p. 8). Por fim, uma última fase que Christiansen localiza entre 1971/72 e 1975 e em que distingue dois movimentos de sentido ou com propósitos contrários. Um, progressivo, que procurava corrigir os erros iniciais e apostava no desenvolvimento de meios para conseguir atingir os objectivos educativos visados pela reforma. Outro, reactivo, de contestação a essa reforma[2], em particular dos pais dos alunos, pugnando pelo "retorno aos currículos e métodos de ensino tradicionais" (p. 9).

Cobrindo sensivelmente o mesmo período de tempo, James T. Fey (1978) fez uma análise do mesmo tipo da de Christiansen (1975) relativa aos Estados Unidos da América. Embora reconhecendo as dificuldades criadas pela diversidade das concretizações da reforma da Matemática Moderna e pelas características do sistema educativo no país — nomeadamente, devido à inexistência de um controlo centralizado a nível nacional, bem como à ausência de um currículo uniforme e de livros de texto ou exames nacionais — Fey retira algumas conclusões, em muitos aspectos com semelhanças às que encontrámos em Christiansen: entusiasmo e optimismo dos primeiros anos da década de sessenta, desfasamento entre as expectativas criadas nestes primeiros anos e a prática corrente nas escolas, progressivo descontentamento na comunidade

[1] Como possíveis causas desta situação, Christiansen salienta a falta de motivação dos professores face aos novos programas e também o facto de os cursos de formação serem de curta duração e centrados nos novos tópicos e na terminologia matemática.

[2] Christiansen refere que se vivia, na altura, um momento de recessão económica que provocou uma viragem à direita na política de muitos países europeus o que, em seu entender, criou campo para movimentos de reacção "em favor de programas pedagógicos restritivos" (p. 9). Para o autor, a Matemática Moderna pode ter servido como "bode expiatório" pois foi responsabilizada por problemas educativos de carácter geral, em sua opinião, muito estreitamente ligados com a evolução da situação social e cultural da época.

educativa e no público em geral, face aos resultados da implementação da reforma, muito motivado, no caso dos Estados Unidos da América, pelo declínio dos resultados dos alunos nos testes de admissão às universidades.

Na verdade, Fey (1978) considera que as pessoas envolvidas na implementação da Matemática Moderna "sobreestimaram os prováveis benefícios" (p. 343) da suas propostas curriculares em termos de conteúdos e métodos de ensino e "subestimaram consideravelmente" (p. 343) as questões de implementação. Refere-se, em particular, ao que dizia respeito à produção de materiais de ensino e formação de professores, bem como à importância de conquistar o público e a comunidade educativa para as mudanças pretendidas. Sobre as orientações curriculares, o autor considera que, relativamente aos conteúdos matemáticos, no essencial, estavam a ser seguidas — com excepção da valorização das Probabilidades e da Estatística, ainda "em grande medida por cumprir" (p. 344) — o mesmo não acontecendo com as recomendações de carácter metodológico. O exemplo que destaca é igualmente o caso do ensino por descoberta — "evidência de mudança na utilização do ensino por descoberta (*discovery teaching*) é praticamente inexistente (p. 345) — e ainda o da manutenção da tradicional sequência de ensino "exposição do professor e [subsequente] prática prolongada por parte dos alunos" (p. 345) na Escola elementar, ou do predomínio do "ensino expositivo ou por descoberta fortemente guiada" (p. 345) na Escola secundária[1].

Sobre o declínio dos resultados dos alunos nos testes, Fey considera-o como "o sinal de mudança mais visível e mais embaraçante" (p. 343). Esta situação gerou uma insatisfação generalizada nos pais e em muitos sectores do público em geral — acentuada, segundo o autor, pelos elevados gastos em educação — e, como na Europa, uma forte reacção contra os novos programas, reclamando um retorno aos currículos anteriores à Matemática Moderna, apontada como a principal causa da situação referida. Assim, mesmo considerando a variedade de situações na concretização e desenvolvimento curriculares

[1] Dez anos mais tarde, Zalman Usiskin (1985), conclui o mesmo numa análise do ensino da Matemática nos Estados Unidos da América e Canadá, afirmando a tese de que "as mudanças no conteúdo e na estrutura das disciplinas tendem a durar mais do que as mudanças nos estilos ou abordagem de ensino" (p. 9). Referindo-se aos aspectos metodológicos e a formas de ensino associados à Matemática Moderna, afirma que em muitos casos eles não eram praticados nas escolas, dando o exemplo do método de descoberta: "O ensino por descoberta não é muito usado actualmente" (p. 2).

no quadro da reforma da Matemática Moderna, nos Estados Unidos da América e em muitos países da Europa, cedo na década de sessenta se manifestaram reacções críticas e movimentos de contestação a essa reforma no seio da comunidade educativa, depois presentes também, no princípio dos anos setenta, em meios públicos mais alargados.

Perspectivas críticas no seio da comunidade matemática. Em 1962 nos Estados Unidos da América, um grupo matemáticos publicou um memorando — *On the mathematics curriculum of the high school*[1] (Ahlfords et al., 1962) — onde as propostas do *School Mathematics Study Group* desenvolvidas no quadro da Matemática Moderna eram questionadas. Esse grupo de matemáticos criticava, em particular, a introdução de conceitos "sem uma base suficiente de factos concretos" e a de conceitos unificadores quando "não existe experiência para unificar" (p. 192), reagindo contra uma formalização e abstracção prematuras. Também se manifestava contra a inexistência de aplicações matemáticas no currículo e de relações da Matemática com as outras ciências — "O que está mal no actual currículo da Escola secundária não são tanto os assuntos [matemáticos] apresentados, mas o isolamento da Matemática de outros domínios do conhecimento e da investigação, particularmente das ciências físicas"[2] (p. 193) — concluindo:

> "Desejamos em especial que os novos currículos reflictam mais as conexões entre a Matemática e as [outras] ciências e tenham cuidadosamente em atenção a distinção entre os assuntos que são prioritários do ponto de vista lógico e os assuntos que devem ter prioridade no ensino". (p. 193)

[1] Assinam este memorando 65 matemáticos e, entre os signatários, encontram-se muitos matemáticos proeminentes, por exemplo, Georg Pólya, Richard Courant, Morris Kline, H. O. Pollack, André Weil, Alexander Wittenberg, Garret Birkoff. O memorando foi publicado nas revistas *The Matematics Teacher* e *American Mathematical Monthly*, tendo ainda sido reproduzido na íntegra por Morris Kline em 1973, no seu livro *Why Johnny can't add: The faillure of the New Math.*

[2] Vogeli (1976) considera que o memorando aqui citado traduz as concepções de Morris Kline que sintetiza do seguinte modo: "A aprendizagem da Matemática é mais efectiva e eficiente quando se dá ênfase a aplicações matemáticas significativas" (p. 10). Acrescenta, no entanto, que intervenções como a deste grupo de matemáticos pouco abalaram ou influenciaram o *School Mathematics Study Group*, considerando-as como "irritações menores" (*minor irritations*, p. 10) que conduziram, em alguns casos, a pequenos ajustamentos mas nunca a uma reformulação dos princípios orientadores da Matemática Moderna.

Ao longo da década de sessenta e início dos anos setenta, outros matemáticos manifestaram as suas reservas e críticas profundas relativamente à reforma da Matemática Moderna, incidindo, quer nos seus pressupostos e princípios orientadores, quer em muitos aspectos das suas concretizações curriculares. Num colóquio promovido em 1964 pela *International Comission on Mathematical Instruction* (ICMI), A. Wittenberg chamou a atenção para a indefinição pedagógica da reforma e alertou para "os perigos relacionados com uma modernização formal que não se funde adequadamente numa clara consciência dos objectivos [e] dos meios para conseguir resultados, e uma concepção clara da educação em geral" (Howson, 1984, p. 84). René Thom foi outro dos matemáticos que, desde cedo, se destacou pela sua oposição e crítica radical à reforma da Matemática Moderna (Thom, 1971, 1973) , assim como o matemático norte americano Morris Kline (1970, 1976).

René Thom critica as perspectivas pedagógicas e filosóficas da reforma fazendo incidir as suas discordâncias sobre o tratamento que era dado à Geometria e sobre a sobrevalorização da Álgebra, bem como na abordagem lógico-dedutiva e axiomática e na concepção de rigor que via nas propostas da dita reforma[1]. Em particular, este matemático critica a exclusão da Geometria euclidiana tradicional e a sua substituição pela Geometria algebrizada, rebatendo o argumento da inutilidade da 'Geometria dos triângulos', pois, como diz, do ponto de vista da Matemática elementar, a Álgebra não é mais útil que a Geometria, o mesmo acontecendo no que se refere à sua utilização pelo homem comum na vida de todos os dias (Thom, 1971). Para além disto, considera que "só as teorias que apresentam um cariz lúdico têm virtude pedagógica, e, de todos os jogos, a Geometria euclidiana, que se refere constantemente a um dado intuitivo subjacente, é o menos gratuito, o mais rico em significação. Assim a tendência actual, que consiste em substituir a Geometria pela Álgebra, é pedagogicamente nefasta e deverá ser invertida"[2] (p. 226). Em relação à noção de

[1] Thom (1971) critica também a forma como era utilizada a teoria de conjuntos, nomeadamente, a simbologia e operatória que lhe estavam associadas, conduzindo a exercícios "bizarros e inúteis" podendo perturbar, pela sua insistência, o "equilíbrio intelectual dos alunos" (p. 234). Thom refere-se, nomeadamente à utilização dos símbolos $\in$, $\subset$, $\supset$, $\cup$, e $\cap$, e à sua tradução em frases da linguagem corrente e vice-versa, chamando ainda a atenção para o "erro filosófico" (p. 232) que consiste em supor que, com essa utilização, é possível explicitar qualquer raciocínio ou dedução.

[2] Sobre a questão da substituição da geometria pela álgebra, Thom (1971) justifica a sua discordância ainda com o argumento de que, ao nível de ensino elementar e secundário, é

rigor matemático, Thom contrapõe-na à noção de sentido, noção a que atribui mais importância na Matemática e no seu ensino, e sustenta que:

> "Em nada são necessárias grandes construções axiomáticas ou maquinarias conceptuais para julgar a validade de um raciocínio; basta possuirmos uma inteligência suficientemente clara do sentido de cada um dos símbolos postos em jogo, e uma visão suficientemente completa das suas propriedades operatórias." (p. 230)

Recusando uma posição formalista, René Thom aproxima-se de uma posição de natureza platónica, por exemplo, quando afirma que "todo o matemático minimamente honesto não deixará de reconhecer que, em todas as suas demonstrações, ele é capaz de atribuir *um sentido* (em itálico no original) a cada um dos símbolos utilizados" (p. 229), assim como quando se refere a uma "confiança na existência de um universo ideal" (p. 229) da parte do matemático, a que ele acede através da intuição. Em seu entender "é na intuição que reside, a *ultima ratio* da nossa fé na verdade de um teorema" e uma demonstração é rigorosa se "perante um leitor suficientemente instruído, suscita um estado de evidência que conduz à adesão" (pp. 229-230).

Sobre o método axiomático, Thom (1971) reconhece o seu poder sistematizador mas põe reservas relativamente às potencialidades heurísticas — "instrumento de sistematização, com certeza, de descoberta, aí o caso é mais que duvidoso" (p. 231) — e considera-o assunto de especialistas "que não tem lugar nem no ensino secundário, nem na Faculdade" (p. 231).

As críticas de René Thom (1971), à reforma da Matemática Moderna e as suas posições perante esta reforma até aqui apresentadas, mereceram uma réplica de Jean Dieudonné (1973) que basicamente reafirma os princípios e propostas da Matemática Moderna. Dieudonné justifica a necessidade de uma abordagem rigorosa no ensino da Matemática da seguinte maneira: uma vez que as pessoas em geral, e em particular os professores, não possuem a intuição que

possível encontrar problemas genuínos em geometria o que não acontece em álgebra. "Um problema em álgebra", diz o autor, "não pode ser nada mais senão um simples exercício requerendo a aplicação cega de regras de cálculo, de um esquema formal preestabelecido. Salvo raríssimas excepções está fora de questão que um aluno possa demonstrar um teorema algébrico pois, ou a propriedade pedida é quase imediata, e se demonstra por substituição directa da definição no definido, ou o problema é uma verdadeira questão algébrica teórica e a sua resolução excederá as capacidades do aluno mais dotado" (p. 227).

possibilita a actividade criativa dos grandes matemáticos, "a única maneira pela qual elas podem conseguir uma boa compreensão da Matemática e transmiti-la aos seus alunos, será uma cuidadosa apresentação dos assuntos, na qual as definições, hipóteses e argumentos sejam suficientemente precisos para evitar qualquer mau entendimento, e possíveis falácias e armadilhas" (p. 16). Relativamente à Geometria e à Álgebra, Dieudonné considera que a Matemática Moderna não pretende a exclusão da Geometria euclidiana mas "[d]*a maneira obsoleta de a ensinar* (em itálico no original)" (p. 18), e reafirma o ideal da reforma — "conseguir uma completa *fusão* (itálico no original) entre as ideias 'geométricas' e 'algébricas' (p. 19) — contestando a oposição em que Thom coloca estas duas áreas matemáticas. E, sobre a axiomatização, considera que, no ensino, ela não deve significar um trabalho sobre os fundamentos da Matemática mas "uma maneira racional e ordenada de apresentar as definições e os teoremas", concluindo com um exemplo: "Penso que pode ser proveitoso para o aluno ter uma lista precisa das propriedades fundamentais dos números reais que serão constantemente utilizadas na Análise" (p. 18).

Muitas das questões problemáticas atrás descritas foram posteriormente retomadas por René Thom (1973) , numa intervenção no 2º congresso da *International Comission on Mathematics Education* (ICME) onde insiste nas críticas à Matemática Moderna e de novo se manifesta contra, por exemplo:

— a exclusão da Geometria e a excessiva valorização da Álgebra[1]; argumentando com o carácter intuitivo e propiciador de sentido da primeira — capaz por isso, como diz, do estabelecimento de pontes naturais entre o concreto e o abstracto e formal sem que, nessa passagem, exista perca de significado — face à abstracção e pobreza semântica da Álgebra, a que acrescenta as suas fracas potencialidades heurísticas;

---

[1] Comparando a linguagem comum, a linguagem da geometria euclidiana e a linguagem algébrica, Thom (1973) afirma que "a geometria euclidiana é um estado intermediário natural (e talvez insubstituível) entre a linguagem comum e a linguagem algébrica", considerando por esta razão que "eliminar a geometria elementar, para que possam ter lugar o cálculo infinitesimal e a álgebra linear, é pouco recomendável do ponto de vista psicológico, uma vez que os objectos algébricos (os símbolos) são semanticamente demasiado pobres para, directamente, por si próprios, poderem ser compreendidos, como acontece no caso de uma figura espacial" (pp. 207-208).

— a ênfase no rigor em detrimento do sentido[1], argumentando que, "o verdadeiro problema com o qual o ensino da Matemática se confronta não é o problema do rigor, mas o do desenvolvimento de 'sentido', o da 'existência' dos objectos matemáticos" (p. 202);

— e, a valorização das estruturas abstractas e dos aspectos dedutivos na abordagem matemática no ensino[2].

Morris Kline, por sua parte, também muito cedo na década de setenta, manifestou sérias reservas relativamente à reforma da Matemática Moderna e foi dos matemáticos que, nos Estados Unidos da América, mais se distinguiu na oposição e crítica a essa reforma. Muitas dessas reservas e críticas são semelhantes ou estão próximas das que atrás foram descritas. Este autor manifesta-se contra a inclusão de alguns dos chamados tópicos matemáticos modernos — como, por exemplo, a teoria de conjuntos[3], a lógica simbólica, a Álgebra abstracta e as estruturas matemáticas — bem como a abordagem ou a forma de apresentação proposta para os temas curriculares e as perspectivas didácticas em relação à Matemática que lhes eram subjacentes (Kline, 1970, 1976). No essencial, questiona a ênfase na lógica e no rigor, e o privilégio da abordagem dedutiva da Matemática em detrimento da abordagem intuitiva, e, por conseguinte, também a prioridade e a valorização excessiva dos aspectos mais abstractos e formais da Matemática e a sua introdução prematura, bem como dos aspectos terminológicos e de linguagem. Critica também o facto de a Mate-

[1] Thom (1973) afirma que em Matemática "trabalha-se quase sempre em situações semi-formalizadas, com uma metalinguagem que é o discurso corrente, não formalizado " (pp. 201-202) e que o matemático "atribui significado a todas as proposições" (p. 202) com que trabalha. Para o autor, apenas os cálculos numéricos e algébricos são processos formais, e pergunta: "Podemos reduzir a Matemática ao cálculo?" (p. 202).

[2] "No desenvolvimento inicial de uma criança", diz René Thom (1973), "a aprendizagem explícita e dedutiva não está de modo nenhum envolvida" (p. 198) e, referindo-se às estruturas matemáticas, afirma que "não se deve necessariamente pensar que se sabe Matemática por se saber as [suas] estruturas padrão; pelo contrário, elas apenas representam os seus aspectos mais superficiais" (pp. 198-199).

[3] Considerando que a teoria de conjuntos é o tópico matemático que veio a receber maior atenção e a ter mais visibilidade na reforma da Matemática Moderna, Kline (1976) é de opinião que, ao contrário do que era proposto, a sua utilização curricular não contribuiu para um visão da unidade da Matemática. A forma como era utilizada no ensino, diz-nos o autor, resumiu-se a questões de linguagem e de vocabulário — "além de usá-la artificialmente para definir conceitos, nenhum uso significativo é feito [da teoria de conjuntos]" (p. 119) — e, em seu entender, na Matemática elementar, ela é "um formalismo oco que dificulta as ideias que são muito mais facilmente compreendidas intuitivamente" (p. 120).

mática ser apresentada sem conexões com outras ciências e sem relações com situações reais e com as suas aplicações concretas.

Em relação a este último aspecto, Kline (1976) é muito radical e defende mesmo que o ensino da Matemática como uma disciplina isolada é "uma perversão, uma corrupção e uma distorção do verdadeiro conhecimento" (p. 177), uma vez que na realidade e historicamente tal não acontece. A Matemática, diz Kline, "não é um corpo isolado e auto-suficiente", e continua:

> "[A Matemática] existe primariamente para ajudar o homem a compreender e a dominar os mundos físico, económico e social. Serve para fins e propósitos. Precisamos de mostrar constantemente o que ela realiza nos domínios fora dela." (p. 179)

Para Morris Kline "a motivação natural [dos alunos para a Matemática] está no estudo de problemas reais e em grande parte físicos" (p. 182) e este tipo de problemas serve "para dar sentido" (p. 185) à Matemática. Do seu ponto de vista, as aplicações constituem um meio com o qual é possível obter, da parte dos alunos "uma apreciação mais profunda do valor instrumental da Matemática (...) [e] um esclarecimento e ilustração do seu conteúdo" (p. 185).

Em relação à abordagem lógica e dedutiva no ensino, bem como à ênfase no rigor atribuída às propostas da reforma da Matemática Moderna, Morris Kline, com inúmeros exemplos da história da Matemática e citando diversos matemáticos, critica veementemente essa ênfase, bem como o privilégio dado à abordagem lógica e dedutiva. Kline (1970) afirma que a introdução dos conceitos matemáticos, seguindo esta abordagem, conduz à desmotivação dos alunos, provoca distorções na concepção da Matemática que induz e comunica ao aluno "uma impressão completamente falsa de como a Matemática se desenvolve" (p. 273). Este tipo de abordagem, em seu entender, inverte a ordem por que se sucede o processo desse desenvolvimento e esconde a verdadeira natureza da Matemática como actividade criativa. A lógica, diz o autor, "é o último acto no desenvolvimento de um ramo matemático", "nada descobre", acrescentando que ela "poderá ser uma norma e uma obrigação da Matemática mas não é a sua essência" (p. 272). E, relativamente ao estudo dedutivo rigoroso da Matemática no ensino, que implica a consideração de axiomas, e a demonstração de teoremas, "intuitivamente óbvios", Kline (1976, p. 76) considera que esse estudo surge aos alunos como desnecessário e irrelevante. "Se os melhores matemáticos não reconheceram a necessidade desses axiomas durante mais de dois mil anos", diz o autor, "como podemos esperar que os jovens vejam a necessidade deles?". Em sua opinião, insistir em tal leva os alunos a concluir que a Matemática "está preocupada em provar o que é óbvio" (p. 76).

Por tudo isto, e invocando também a forma como se processa, do seu ponto de vista, o trabalho de investigação em Matemática — "[o matemático] não trabalha de um modo dedutivo, pelo contrário, faz uso da sua imaginação e procede indutivamente com o auxílio de expedientes heurísticos" (p. 274) — Kline contrapõe à abordagem lógico-dedutiva, uma abordagem intuitiva que, em sua opinião, "deverá ser a principal na introdução de um novo assunto *em todos os níveis* [de ensino]" (em itálico no original, p. 266).

Estas foram as principais perspectivas críticas e propostas alternativas à reforma da Matemática Moderna que surgiram no seio da comunidade matemática em países do então denominado mundo ocidental. Todavia, também na USSR existiram matemáticos que intervieram criticamente e puseram em causa muitas das novas propostas curriculares, face ao modo como a reforma estava a ser implementada e aos fracos resultados dos alunos nos exames. Os matemáticos soviéticos Pontrjagin, Tichonov e Vladimirov (Keitel, 1982), protagonizaram críticas ao novo currículo que punham em causa "o alto nível de formalização" resultante de um currículo construído com base na teoria de conjuntos e elaborado com "a maior consistência sistemática possível" (pp. 112-113). As críticas formuladas são apresentadas por Cristine Keitel (1982, p. 113) organizadas em três grupos onde sinteticamente se diz que:

—do ponto de vista da Matemática, os referidos matemáticos põem reservas à abordagem pela teoria de conjuntos, pelo facto de ela "pressupor a compreensão matemática mais do que a proporcionar" e questionam a sua utilização em Geometria, por a sua terminologia ser "inconsistente" com esse domínio e "provocar confusões" no seu estudo; põem também em causa a introdução das funções como relações matemáticas, e a forma como a Análise é introduzida que "não é compreensível" para os alunos;

—do ponto de vista pedagógico, o grau de formalização do currículo é criticado por consumir demasiado tempo da aula, na medida em que os aspectos terminológicos formais "se tornam um matéria de ensino (*subject-matter*) por direito próprio", implicando uma sobrecarga de "definições e de explicações" em detrimento da "visualização e dos exercícios"; por outro lado, é posta em causa a "exclusão das abordagens intuitivas" dos conceitos matemáticos;

—e, do ponto de vista das aplicações matemáticas, é questionado o facto de a Matemática ser ensinada sem que sejam evocadas as suas aplicações ou as suas relações com outras disciplinas; o novo currículo é considerado "insatisfatório na medida em que separa a Matemática da Física e da tecnologia devido a uma terminologia e linguagem desajustadas".

Outros matemáticos soviéticos houve que também manifestaram reservas face ao currículo da Matemática Moderna implementado na USSR, como por exemplo A. D. Aleksandrov que valorizou um conhecimento matemático que tivesse "utilidade prática" e fosse capaz de "contribuir para a formação da personalidade" (Keitel, 1982, p. 114). Este matemático, em relação à Geometria, destacou a importância do desenvolvimento de capacidades que o seu ensino pode proporcionar — "criatividade, intuição, sentido da realidade" (p. 114).

Estas reacções críticas dos matemáticos levaram a que fossem elaboradas propostas alternativas ao novo currículo que Keitel (1982) apresenta e de onde se destacam aspectos como: o abandono da teoria de conjuntos como abordagem para a introdução dos conceitos matemáticos e a diminuição do uso da terminologia e simbologia mais elaboradas, em favor da linguagem corrente; a defesa de uma abordagem intuitiva, em detrimento da precisão teórica; e, a valorização das aplicações matemáticas e da tecnologia.

Sintetizando, podemos afirmar que as principais perspectivas críticas à reforma da Matemática Moderna que surgiram entre os matemáticos incidiam sobre aspectos que iam desde os seus pressupostos e princípios de natureza filosófica e pedagógica, até aspectos mais específicos, relacionados com os assuntos matemáticos ou abordagens metodológicas propostos. Assim, por um lado, foram seriamente postos em causa o abandono da Geometria euclidiana intuitiva, o privilégio dado à Álgebra, a introdução da teoria de conjuntos e a forma como ela era utilizada, e ainda a prioridade dada às estruturas matemáticas. Por outro lado, foi também criticada a excessiva e prematura abstracção e formalização na Matemática escolar, a orientação axiomática no ensino e a primazia conferida à abordagem lógico-dedutiva, a ênfase exagerada no rigor e nos aspectos terminológicos e simbólicos, e, a inexistência de conexões entre a Matemática e as outras disciplinas e situações da realidade.

A reacção pública: em favor da Matemática escolar 'tradicional'. A reacção que se manifestou, da parte dos pais dos alunos e de outros sectores do público em geral, começou a ter lugar no início da década de setenta e tomou corpo devido ao insucesso continuado dos alunos, nomeadamente, no que se refere aos Estados Unidos da América, aos seus resultados nos testes para a admissão na Universidade. A ideia muito divulgada de que os alunos não só não compreendiam a Matemática, como tinham fortes deficiências em aspectos básicos como o cálculo, e que tais carências eram devidas aos novos currículos implementados no quadro da reforma da Matemática Moderna[1], gerou um movimento de opinião pública em favor do ensino que vigorava antes da referida reforma. "Uma exigência pública alargada de um '*retorno aos aspectos básicos*' ('*back to basics*', em itálico no original) da educação", é como James Fey (1978, p. 341), alude à referida reacção pública, sublinhando assim o seu propósito principal: o regresso, no ensino da Matemática, ao mais elementar, às aptidões ou destrezas básicas (*basic skills*) tal como eram interpretadas no ensino pré-Matemática Moderna[2]. Uma "rebelião", segundo Usiskin (1985), sob um "nome sedutor" — *back to basics* — que proclamava o retrocesso à Matemática dita 'tradicional', valorizando muito particularmente, as "aptidões manipulativas de papel-e-lápis" (*paper-and-pencil manipulative skills*, p. 7).

As perspectivas curriculares mais significativas do ensino da Matemática dito tradicional podem ser caracterizadas como o fez Willy Servais (1975),

[1] Esta ideia teve grande impacto logo no princípio da década de setenta, em grande parte resultante das intervenções de Morris Kline, nomeadamente, através do conhecido livro de 1973 que muito significativamente intitulou *Why Johnny can't add: The faillure of the New Math* (Kline, 1976). Sobre este livro, Vogeli (1976) considera que ele "abalou a confiança dos pais, professores e técnicos educativos (*administrators*) no movimento da 'Matemática Moderna'" (p. 18) o que teve como resultado um "retorno às aptidões básicas" (*basic skills*, p.19). Referindo-se ao mesmo livro, e à contestação que teve lugar no início dos anos setenta, responsabilizando o currículo gerado pela Matemática Moderna pelo insucesso dos alunos, Usiskin (1985) diz por sua vez: "Apareceu uma rebelião com uma convocatória, *Why Johnny can't add*" (p. 7).

[2] J. R. Hooten Jr. (1981) situa em 1975 o início deste movimento de reacção à Matemática Moderna: "Cerca de 1975, começou a reclamar-se [nos Estados Unidos] um regresso aos antigos caminhos, num movimento popularmente chamado '*back to basics*' (p. 34).

referindo-se à tradição europeia. Diz-nos este autor que, relativamente aos conteúdos matemáticos no ensino elementar, o mais corrente era a Aritmética com um incidência quase exclusiva no cálculo com números e fracções e que o ensino de outros assuntos, como por exemplo, comprimentos e áreas, custo de alimentos e matérias-primas, preços de compra e venda, percentagens, volumes etc., "terá mudado de uma utilização significativa [desses assuntos] em estreita ligação com a vida corrente, para um treino rotineiro (*rote training*) em aptidões de cálculo (*computational skills*) e para a resolução mecânica de somas estereotipadas (*mechanical solving of stereotyped sums*)" (p. 38).

No que respeita ao ensino secundário, o mesmo autor diz-nos que os tópicos tradicionais eram a Aritmética, a Álgebra, a Geometria plana na perspectiva euclidiana e a Trigonometria — estudada isoladamente — e ainda a Geometria analítica e descritiva. Diz-nos também que a teoria era trabalhada com os alunos de forma "bastante expositiva e dogmática" (*demonstrative and dogmatic*) (p. 38) e que as aplicações matemáticas eram usadas por muito poucos professores. Terminando a sua apreciação do ensino da época anterior à Matemática Moderna, Servais refere-se aos objectivos gerais da educação da altura dizendo que esta era considerada como "uma transmissão fiel do conhecimento herdado da tradição e de modo nenhum como uma aprendizagem e formação de atitudes apropriadas para enfrentar o futuro e o desconhecido" (p. 39).

Nos Estados Unidos da América as características do ensino 'tradicional' anterior à Matemática Moderna, de uma maneira geral, eram semelhantes às do ensino europeu na mesma época, nomeadamente no que diz respeito à valorização da Aritmética e dos processos e técnicas de cálculo, bem como ao tratamento da Geometria plana euclidiana, da Trigonometria e da Álgebra. Havia igualmente um predomínio de actividades de rotina e de repetição de exercícios, esperando-se do aluno, essencialmente, a memorização de factos, regras e técnicas e, em alguns casos, de processos demonstrativos, e a sua aplicação nesses exercícios.

Morris Kline (1976), ao descrever o currículo tradicional nos Estados Unidos da América, diz-nos que uma das críticas principais que lhe eram feitas se referia, precisamente, à sua ênfase na memorização e na mecanização, com o recurso à repetição de exercícios. "Por via de regra", diz Kline, "o currículo tradicional não dá muita atenção à compreensão; confia em exercícios para fazer com que os alunos sigam facilmente o processo" (p. 20). Esta crítica, segundo o autor, era particularmente relevante quando aplicada ao ensino da Álgebra ou ao ensino da Geometria, nomeadamente no que respeita à demonstração. A Geometria, lembra Kline, era ensinada numa perspectiva essencialmente dedutiva e, uma vez que "o aluno não pode perceber o fundamento lógico [da demonstração][1], ele pratica na Geometria o mesmo que pratica em Álgebra, decora a demonstração" (p. 22), concluindo que, em Geometria ou em Álgebra, com ou sem demonstração, "o método tradicional de ensinar resulta francamente num único tipo de aprendizagem: memorização" (p. 22).

Uma outra característica do currículo tradicional, descrita por Kline (1976) como "o defeito mais grave que se pode lançar sobre qualquer currículo" (p. 22), era a falta de motivação, a ausência de relações com aspectos não matemáticos. Para Kline, esse currículo, propunha uma espécie de Matemática pela Matemática, ou seja, uma Matemática autojustificada pelas suas próprias características — por exemplo, características estéticas, ou propiciadoras de desafios intelectuais — ou pelos seus eventuais contributos de natureza formativa — do tipo, desenvolvimento do raciocínio do aluno — e pela sua necessidade para o percurso escolar do aluno e utilidade futura na sua vida. A inexistência de laços com outras disciplinas e de relações com situações reais, conduz a que, no entender do autor, o referido currículo "não ofereça motivação para o estudo da Matemática" (p. 28) e os alunos não atribuam significado nem reconheçam importância ao que é ensinado.

O currículo de Matemática dito tradicional pode pois ser caracterizado, em termos gerais, por: o privilégio da Aritmética, particularmente nos primeiros anos de escolaridade; o predomínio do cálculo e manipulação quer numéricos, quer algébricos; uma Matemática descontextualizada; uma sequência de ensino essencialmente do tipo exposição do professor seguida da resolução de exercícios por parte dos alunos; uma ênfase na memorização e mecanização; um estudo da Geometria a partir dos axiomas e definições de Euclides, com a

[1] Kline (1976) chama a atenção para o facto de a demonstração de um teorema ser algo que raramente surge de forma espontânea e natural nos alunos, uma vez que, frequentemente, é o culminar de um processo de tentativas e baseia-se em algum "esquema engenhoso que permita provar o teorema na devida sequência lógica" (p. 21). Tal como as demonstrações eram ensinadas, diz o autor, não conduziam a uma percepção e compreensão de todo o processo que a elas conduziam.

demonstração dos teoremas, trabalhada também principalmente com base na mecanização e memorização. O movimento de reacção *back-to-basics*, no essencial, visava o retorno a muitos destes aspectos característicos do *status quo* do ensino da Matemática no quadro do currículo tradicional. Todavia, ao mesmo tempo que este movimento se desenvolvia e tomava força, emergiam perspectivas no seio da comunidade educativa que, se questionavam aspectos da Matemática Moderna, em maior ou menor extensão, questionavam igualmente os propósitos e os objectivos daquele movimento de retrocesso.

Perspectivas alternativas contra um retrocesso no ensino da Matemática. Na segunda metade dos anos setenta, concomitantemente com a emergência e o desenvolvimento do movimento de reacção à Matemática Moderna *back to basics*, emergiram posições, no seio de organizações educativas diversas, que contrariavam as tendências conservadoras desse movimento. Tais posições criticavam, nomeadamente, o que essas tendências tinham de 'redutor' nas aptidões básicas (*basic skills*) que propunham para o ensino, e a visão muito limitada e empobrecida da Matemática e da actividade matemática que a ênfase no cálculo e no domínio de destrezas técnicas, por que pugnavam, traduzia.

É assim que, por exemplo, surge, logo em 1975 nos Estados Unidos da América, o relatório *Overview and analysis of school mathematics: Grades K-12* do *National Advisory Committee on Mathematical Education*[1] (NACOME), três anos depois, o documento *Position Statements on Basic Skills* do *National Council of Supervisors of Mathematics* (NCSM, 1978) e, em 1980, pela mão do *National Council of Teachers of Mathematics*, o conjunto de recomendações para o ensino da Matemática publicado sob o título *An agenda for action: Recommendations for school mathematics of the 1980s* (NCTM, 1980)[2]. Estes documentos visavam precisamente contrariar a lógica de retrocesso inerente ao movimento *back to basics*, contrapondo-lhe uma lógica de renovação que, no essencial, podemos caracterizar pela visão mais alargada que oferecia das apti-

[1] Esta comissão foi encarregue de elaborar o relatório referido cujo propósito era descrever e analisar a situação do ensino da Matemática não superior nos Estados Unidos da América, tendo como incidência principal os seus objectivos, práticas e resultados (NACOME, 1975).

[2] Existe uma tradução portuguesa deste documento publicada em 1985 (NCTM, 1985).

dões básicas para o ensino da Matemática e pela proposta de um conjunto de novas orientações curriculares para este ensino.

De facto, no que se refere às aptidões básicas, os três documentos em questão advogam unanimemente que essas aptidões não se devem restringir às destrezas de carácter técnico. "O conceito de 'aptidões básicas' ('*basic skills*') (...) deve ser definido de modo a incluir mais do que aptidões de cálculo (*computacional skills*)", diz-se no relatório no NACOME que ainda acrescenta que esse conceito deve também integrar "capacidades para lidar inteligentemente com a informação estatística, para raciocinar logicamente e pensar de modo crítico" (NACOME, 1975). O documento do NCSM (1978) vai mais longe na clarificação e especificação do que deve ser entendido como aptidões básicas no ensino da Matemática e propõe um conjunto de dez áreas para a sua definição que contemplam uma grande variedade de capacidades e de conhecimentos matemáticos[1]. A *Agenda para a acção* (NCTM, 1980) segue de muito perto as recomendações e propostas dos dois documentos anteriores a este respeito. No seu ponto número 2, recomenda que as capacidades básicas não se devem limitar ao domínio do cálculo e, para especificar esta recomendação, recorre às dez áreas propostas pelo NCSM para o estabelecimento dessas capacidades.

Relativamente às orientações curriculares propostas, os documentos em análise têm em comum algumas ideias e perspectivas que a *Agenda* sistematiza num conjunto de recomendações, especificando e desenvolvendo muito do que é proposto nos outros dois documentos. A ideia da importância da resolução de problemas no ensino, com pouca visibilidade nas recomendações do NACOME (1975a, 1975b), vem a ser a primeira das dez áreas de aptidões básicas propostas pelo NCSM (1978) — onde se assume que "aprender a resolver problemas é a principal razão para estudar Matemática" (p. 148) — e a constituir, na *Agenda*, uma das suas ideias fortes e o conteúdo da sua primeira recomendação:

> O *National Council of Teachers of Mathematics* recomenda que:
>
> 1. A resolução de problemas seja o foco (*focus*) da Matemática escolar nos anos 80. (NCTM, 1980, p. 1)

---

[1] Nomeadamente, a resolução de problemas e as aplicações da Matemática, a estimação e a sensibilidade à plausibilidade dos resultados, a geometria e a medida, a leitura, interpretação e construção de tabelas e gráficos e a capacidade em usar a Matemática para fazer previsões, a literacia em computadores (NCSM, 1978).

Duas outras ideias fortes, em termos das orientações curriculares para o ensino da Matemática, caracterizam os três documentos: a valorização das aplicações da Matemática e o papel de relevo atribuído à tecnologia, em particular, às calculadoras e ao computador. Na verdade, por exemplo, é realçada a importância do facto de os alunos poderem "aplicar a Matemática num domínio tão amplo quanto possível" (NACOME, 1975, p. 138) e "considerar situações da vida corrente, traduzi-las em expressões matemáticas, resolver os aspectos matemáticos em presença e interpretar os resultados" (NCSM, 1978, p. 149), recomendando-se que os programas de Matemática proporcionem aos alunos "experiência da aplicação da Matemática" e os envolvam "na resolução de problemas apresentando aplicações" (NCTM, 1980, pp. 3-4), quer relacionadas com o quotidiano, quer com outras disciplinas e áreas da actividade humana. No que diz respeito à tecnologia, é também bem visível a importância que lhe é reconhecida, e o relevo dado ao seu papel no ensino da Matemática. A utilização da calculadora, por exemplo, é aconselhada desde muito cedo na escolaridade, recomendando-se a sua disponibilização para "cada um dos alunos" e em "cada aula de Matemática" (NACOME, 1975b, p. 138), e a "literacia em computadores" (*computer literacy*) é uma das áreas das aptidões básicas do NCSM (1978, p. 150). Por sua vez, o NCTM (1980), na sua *Agenda* para os anos oitenta, estabelece como uma das recomendações para o ensino da Matemática que os programas desta disciplina "tirem todas as vantagens das potencialidades das calculadoras e dos computadores em todos os níveis de ensino" (p. 1), sublinhando igualmente a importância da acessibilidade da máquina de calcular em todas as aulas de Matemática e da progressiva integração dos computadores. A incorporação da utilização destes instrumentos tecnológicos no currículo é considerada obrigatória e proposta numa perspectiva que valoriza a exploração, a descoberta e o desenvolvimento dos conceitos matemáticos por parte dos alunos e não apenas a verificação de resultados e a realização de exercícios.

Em síntese. Podemos pois dizer que, na sequência da implementação e desenvolvimento da reforma da Matemática Moderna, confrontando o movimento que a ela se opunha, em favor da reposição das principais linhas orientadoras do currículo tradicional, emergiram na comunidade do ensino da Matemática perspectivas alternativas com um sentido progressivo — "qualquer programa efectivo de aptidões matemáticas básicas deve ser dirigido 'não para trás' mas *para a frente* (em itálico no original), em direcção às necessidades essenciais dos adultos no presente e no futuro" (NCSM, 1978) — insistindo na necessidade da renovação da Matemática escolar. Para a efectivação desta renovação, foi tomando corpo nos Estados Unidos da América, até ao final da década de setenta, um conjunto de perspectivas e orientações curriculares que, no que respeitava às aptidões básicas a desenvolver nos alunos, iam muito além do mero domínio do cálculo, das técnicas ou manipulações numéricas e algébricas e da simples memorização e mecanização na aprendizagem.

Essas perspectivas e orientações curriculares — que vieram igualmente a manifestar-se na Europa e também aí a influenciar novos movimentos reformadores — e o quadro de aptidões matemáticas básicas que lhes estava associado, incorporaram novos e mais diversificados objectivos de aprendizagem, e de nível cognitivo mais elevado, bem como uma gama mais ampla de aspectos da actividade matemática. São disso exemplo, a valorização dos processos de recolha, organização e interpretação de informação e de tomada de decisões, da estimação, cálculo mental e análise da plausibilidade dos resultados, da realização de previsões com base na Matemática, bem como, muito particularmente, o relevo dado à utilização da máquina de calcular e do computador, às aplicações da Matemática e à resolução de problemas.

Da resolução de problemas ao 'poder matemático', perspectivas e orientações curriculares à entrada do séc. XXI

A década de oitenta termina com a publicação, nos Estados Unidos da América, de um documento programático que viria a ter grande divulgação internacional e um impacte significativo nas orientações curriculares subjacentes às reformas do ensino da Matemática e aos movimentos de desenvolvimento curricular em diversos países, de que os anos noventa foram muito pródigos. Trata-se dos *Curriculum and evaluation standards for school mathematics* elaborados sob a égide do NCTM e publicados em 1989[1].

[1] Por razões de simplicidade, usarei por vezes a expressão abreviada *Standards* para designar este documento.

A organização norte americana de professores de Matemática decidiu, em 1986, iniciar todo um processo que culminaria com a publicação do referido documento, cujo propósito principal era "delinear uma visão da Matemática escolar suficiente para preparar os alunos para o século vinte e um" (Crosswhite, Dossey e Frey, 1989, p. 666). Com a proposta dos *Standards*, segundo Shirley Frey (1989), um dos membros que supervisionou a sua elaboração, o NCTM pretendia responder a um sentimento de insatisfação face aos fracos resultados dos alunos nos testes de avaliação, que vinha já da década anterior, bem como aos apelos que se mantinham para uma reforma no ensino da Matemática, tendo em vista conseguir uma melhor preparação, nesta disciplina, dos futuros trabalhadores. Uma vez terminados e divulgados, os *Standards* surgem, à entrada da década de noventa, como um guia para a reforma do ensino da Matemática, constituindo, segundo outro membro da comissão que coordenou a sua elaboração, "a posição oficial do NCTM" (Crosswhite, Dossey e Frey, 1989, p. 667) sobre o que a Matemática escolar deveria ser nos anos noventa. Para cada nível considerado, até aos doze anos de escolaridade[1], os *Standards* curriculares apresentam e discutem o que se espera dos alunos desse nível, em termos da sua aprendizagem matemática, bem como o que o professor pode fazer para promover essa aprendizagem.

As grandes finalidades educativas dos *Standards*. Tendo como pressuposto que, em cada época, as finalidades da educação escolar decorrem, simultaneamente, das necessidades sociais e das necessidades dos alunos dessa época, "As normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar"[2] (NCTM, 1991a) enunciam, logo na introdução, um conjunto de finalidades para o ensino da Matemática a que chamam de "novos objectivos", incidindo, precisamente, sobre essas duas vertentes, a vertente social e a vertente pessoal. A necessidade destes novos objectivos é justificada com a constatação de que se vivia à época uma transição acelerada de uma sociedade industrial para uma sociedade da informação provocada pelo desenvolvimento tecnológico, particularmente no domínio dos computadores e da informática. Por esta razão se defendiam

[1] K(indergarten)-4, 5-8, 9-12 (anos de escolaridade).

[2] Este é o título da tradução portuguesa que a Associação de Professores da Matemática empreendeu e que publicou em 1991 e que, abreviadamente, passarei a designar por *Normas*.

mudanças importantes na Matemática que os alunos deviam aprender para se tornarem "cidadãos produtivos e auto-realizados" (p. 3) no século que se avizinhava. Tornam-se assim visíveis as preocupações de natureza social e pessoal, uma vez que, como propósito global da formação matemática dos alunos, se estabelece que ela deve contribuir, simultaneamente, para a sua inserção social produtiva e para a sua realização pessoal.

São apresentados como "novos objectivos da sociedade" quatro grandes metas educativas correspondendo a quatro grandes necessidades sociais: à necessidade de "trabalhadores matematicamente alfabetizados" e de uma aprendizagem "durante toda a vida", e à necessidade de "igualdade de oportunidades" e de "um eleitorado informado" (NCTM, 1991a, pp. 3-4). Surgem assim, com lugar de destaque, as questões de cidadania, de equidade e de participação social plena, como domínios com que a formação proporcionada pela Matemática escolar se deve preocupar. Afirma-se a necessidade de promover a capacidade de aprender permanentemente, dada a constante e rápida mudança da natureza dos empregos e profissões, muito associada ao grande incremento do desenvolvimento tecnológico; a "igualdade de oportunidades", é erigida como uma meta a atingir, dado o papel fortemente selectivo da Matemática no que diz respeito ao acesso a um emprego e mesmo em termos de uma participação plena na sociedade; e, defende-se que o ensino da Matemática deve concorrer para a formação do cidadão eleitor informado, capaz de compreender os problemas actuais da sociedade (NCTM, 1991a). Para além disto, é consagrada a promoção da alfabetização matemática definida essencialmente com referência à resolução de problemas e entendida como o desenvolvimento de capacidades no cidadão que não se reduzem ao domínio de técnicas. Tais capacidades são apresentadas como aptidões que permitem lidar com problemas e situações problemáticas abertas e compreender os seus aspectos matemáticos, trabalhar cooperativamente para os resolver e reconhecer a aplicabilidade e utilidade da Matemática na sua resolução, bem como o valor desta ciência[1].

No que diz respeito aos "novos objectivos para os alunos", são apresentadas também cinco grandes metas educativas, estabelecendo para "todos os

[1] Esta caracterização da alfabetização matemática é feita com o recurso a uma enumeração realizada pelo matemático Henry Pollak relativamente ao que, em sua opinião, "se espera dos novos empregados da indústria, no que respeita à Matemática" (Pollack, 1987, p. 4).

alunos" que, no seu percurso na Matemática escolar: "aprendam a dar valor à Matemática", "adquiram confiança na sua capacidade de fazer Matemática", "se tornem aptos a resolver problemas matemáticos", "aprendam a comunicar matematicamente", e, "aprendam a raciocinar matematicamente" (NCTM, 1991a, pp. 5-6). Esta formulação das grandes finalidades ou objectivos gerais para o ensino da Matemática, do ponto de vista dos alunos, repare-se, é feita em termos de atitudes e capacidades a adquirir e desenvolver por esses alunos. Atitudes positivas face à Matemática, valorizando-se o facto de os alunos "poderem apreciar o papel que a Matemática desempenhou no desenvolvimento da nossa sociedade contemporânea" (NCTM, 1991a, p. 6), e face às suas próprias capacidades matemáticas, reconhecendo-se a importância do desenvolvimento da autoconfiança dos alunos. "Em certa medida", diz-se a este respeito, "toda a pessoa é um matemático e faz Matemática conscientemente", acrescentando-se que "a Matemática escolar deve ajudar todos os alunos a compreender que fazer Matemática é uma actividade humana comum" e a conseguir que confiem "no seu próprio pensamento matemático" (p. 7).

No que se refere às capacidades, as finalidades formuladas incluem a resolução de problemas, a comunicação e o raciocínio matemáticos, trio de aptidões a que é dado particular destaque nas *Normas* e que tem um papel estruturante no documento, constituindo o conteúdo das três primeiras normas curriculares nos níveis etários para que são propostas. Com a comunicação e o raciocínio matemático, chama-se a atenção, no primeiro caso, para necessidade da aprendizagem da simbologia e terminologia matemáticas e para importância da comunicação escrita e oral em Matemática na clarificação, aperfeiçoamento e consolidação do pensamento matemático dos alunos. No segundo caso, para o valor que a formulação de conjecturas e a justificação e a argumentação têm enquanto "actividades fundamentais para fazer Matemática" (NCTM, 1991a, p. 79. A resolução de problemas assume especial relevo, sendo apresentada como "o foco da Matemática escolar" (p. 7), reafirmando-se desta forma a importância que já lhe tinha sido atribuída na *Agenda para a acção* dos anos 80 (NCTM, 1980). Esta importância é visível ao longo de todo o documento das *Normas*, na definição das finalidades e objectivos de aprendizagem, e no modo como é consagrada enquanto abordagem didáctica e actividade matemática com lugar privilegiado como contexto de aprendizagem[1].

As orientações curriculares: a centralidade da noção de "poder matemático". Se a resolução de problemas assume, nas *Normas* do NCTM a importância referida e é apontada como devendo constituir a incidência principal do ensino da Matemática, os objectivos para os alunos atrás descritos, no seu conjunto, são formulados com um propósito global essencial: desenvolver no aluno o seu "poder matemático" (*mathematical power*). Emerge assim um novo conceito que as *Normas* introduzem com um relevo especial, e que é aí caracterizado do seguinte modo:

> "[O poder matemático] refere-se às capacidades de um indivíduo para explorar, conjecturar e raciocinar logicamente, bem como à sua aptidão para usar uma variedade de métodos matemáticos para resolver problemas não rotineiros. Esta noção é baseada no reconhecimento de que a Matemática (...) inclui métodos de investigação e de raciocínio, meios de comunicação e noções de contexto. Além disso, para cada indivíduo, o *poder matemático* (em itálico no original) inclui o desenvolvimento da autoconfiança." (p. 6)

Associadas aos objectivos, são enunciadas orientações curriculares genéricas sobre o tipo e propósito principal das experiências de aprendizagem a propor aos alunos, afirmando-se, nomeadamente, que essas experiências devem ser tais que os alunos sejam incentivados a: "desenvolver hábitos de pensamento matemático"; "compreender e apreciar o papel da Matemática na humanidade"; "explorar, fazer tentativas e erros, e a corrigi-los de tal modo que ganhem confiança na sua capacidade de resolver problemas complexos"; "ler, escrever e discutir Matemática, e ainda a conjecturar, testar e construir argumentos sobre a validade de uma conjectura" (NCTM, 1991a, p. 6).

Estes objectivos e experiências, diz-se nas *Normas*, devem "atravessar" o currículo da Matemática escolar, acreditando-se que, desse modo, os alunos "adquirirão poder matemático" (p. 6), aquisição que é assim assumida como a

[1] Um dos princípios gerais que são enunciados relativamente ao tipo de actividades a propor aos alunos diz concretamente que tais actividades "devem nascer de situações problemáticas" (NCTM, 1991a, p. 11).

principal finalidade do ensino dessa disciplina. O relevo dado à noção de poder matemático, como grande objectivo curricular, é retomado num outro documento programático da responsabilidade do *National Research Council — Everybody counts: A report to the nation on the future of mathematics education* (NRC, 1989) — publicado, no mesmo ano, na sequência das *Normas*. No capítulo dedicado ao currículo, diz-se nesse documento:

> "A Matemática é um modo de darmos sentido às coisas. Permite apercebermo-nos de padrões, compreender dados, raciocinar cuidadosamente. Verdade e beleza, utilidade e aplicação enquadram o estudo da Matemática como as musas o teatro grego. Em conjunto, definem o poder matemático, o objectivo da educação matemática." (p. 43)

A ideia de poder matemático supõe uma concepção da Matemática e da actividade matemática que nada tem a ver com uma visão estática desta ciência que a limita a um conjunto de factos, sejam eles conceitos, teoremas ou teorias, e à aplicação mais ou menos mecanizada de técnicas ou processos que lhe são próprios. É assim que, no documento do *National Research Council* atrás referido, a Matemática é apresentada como "uma ciência das regularidades e da ordem" e "fazer Matemática" como um processo que "envolve observação de regularidades, teste de conjecturas e estimação de resultados" (NRC, 1989, p. 31). A Matemática, diz-se ainda no mesmo documento, "revela regularidades escondidas que nos ajudam a compreender o mundo que nos rodeia", considerando-se que hoje em dia a Matemática não mais se confina à Aritmética e à Geometria, sendo antes uma ciência multifacetada que "lida com dados, medidas e observações provenientes da ciência; com a inferência, a dedução e a demonstração; e, com modelos matemáticos de fenómenos naturais, do comportamento humano e dos sistemas sociais" (p. 31).

A Matemática é assim concebida como uma disciplina científica com conexões fortes e profundas com a realidade natural e social e com as outras ciências[1], às quais, como é dito, proporciona "um fundamento de verdade e um padrão de certeza" com os seus teoremas, e um conjunto de modalidades de

[1] A este propósito, é afirmado, por exemplo que "a Matemática é o fundamento da ciência e da tecnologia; sem uma Matemática forte, não pode existir ciência forte", e que "a fertilização mútua entre as ciências e a Matemática nos problemas, teorias e conceitos, raramente tem sido tão grande como o é actualmente" (NRC, 1989, pp. 35-36).

pensamento — "modelação, optimização, simbolização, inferência, análise lógica e abstracção" — cujo exercício, diz-se ainda, desenvolve o "poder matemático", aqui entendido como "uma capacidade mental (...) que nos permite identificar falácias, detectar enviesamentos, avaliar riscos e sugerir alternativas" (pp. 31-32). A Matemática é deste modo encarada como uma disciplina capaz de contribuir para a compreensão da realidade em que nos inserimos e de proporcionar instrumentos para um escrutínio crítico dessa mesma realidade, o que, como é também sublinhado, assume especial importância quando a tecnologia e a informação são características dominantes da era que atravessamos.

A noção de "poder matemático" é assim uma espécie de aptidão matemática ampla, compreendendo capacidades matemáticas variadas, e o sentimento de autoconfiança nessas capacidades, que incluem: a resolução e formulação de problemas, o raciocínio lógico e a comunicação em Matemática, a capacidade de explorar situações e de identificar regularidades, a capacidade de formular e testar conjecturas, e a capacidade de valorizar a Matemática e de a relacionar com aspectos contextuais. Desenvolver o poder matemático nos alunos é desenvolver-lhes as capacidades mencionadas e, ao estabelecer este desenvolvimento como a grande meta curricular da Matemática escolar, as *Normas* apontam para um currículo mais exigente, acreditando dessa maneira poder proporcionar aos alunos uma melhor compreensão, naturalmente, da própria Matemática, dos seus métodos e diversas formas de raciocínio ou pensamento, mas também uma melhor compreensão e espírito crítico face ao mundo e às realidades sociais.

Para além do poder matemático, três outras ideias subjacentes às *Normas*, que podemos considerar como pressupostos relativamente à Matemática e à actividade matemática, assumem particular relevância neste documento. A primeira, é a ideia que "saber Matemática é saber fazer Matemática" (NCTM, 1991a, p. 8). Deste modo se sublinha que aprender Matemática não significa um acumular, numa postura mais ou menos receptiva, de conhecimentos (conceitos, terminologia, processos, técnicas) e o seu domínio mais ou menos expedito. Pelo contrário, nesta perspectiva, a aprendizagem supõe o envolvimento do aluno em alguma tarefa, de forma activa e intencional: "uma pessoa, recolhe, descobre ou cria conhecimento no decurso de alguma actividade com finalidade" (p. 8). Valoriza-se assim o processo pelo qual o conhecimento é adquirido, bem como o papel, nesse processo, do sujeito que aprende. Reconhece-se que os conhecimentos têm importância e que os alunos devem conhecer os principais conceitos e processos das áreas matemáticas ensinadas. Todavia, deste ponto de vista, essa importância existe apenas na medida da sua utilidade na tarefa que o aluno realiza, sublinhando-se que "o ensino deve privilegiar permanentemente o *fazer* e não o *saber que*" (itálicos no original, p. 8).

A segunda ideia é que "alguns aspectos relativos ao fazer Matemática mudaram" (NCTM, 1991a, p. 8) com o desenvolvimento da tecnologia e com o grande incremento dos computadores que, com as suas potencialidades, nomeadamente no tratamento quantitativo de dados, tornaram possível novas abordagens, deram origem a novas aplicações da Matemática e valorizaram novas áreas de trabalho. "As técnicas quantitativas invadiram praticamente todas as disciplinas" (p. 8), diz-se a este respeito, e, por esta razão, considerando que nesta nova situação as ideias matemáticas importantes para essas disciplinas também mudaram, defende-se que "um currículo para todos os alunos deve dar oportunidades para a aquisição da compreensão de modelos, estruturas e simulações matemáticas aplicáveis a muitas disciplinas" (p. 9). Reconhecendo que a Matemática é fundamental para todas as ciências e pressupondo que ela própria progride "na proporção directa da sua utilidade" (p. 9), o que está em questão na recomendação curricular citada é a valorização, no ensino, das conexões da Matemática com as outras ciências e, muito em especial, das suas aplicações. As "conexões matemáticas" são, sublinhe-se, como a resolução de problemas, a comunicação e o raciocínio matemáticos, o conteúdo de uma das normas comuns aos três níveis etários definidos no documento do NCTM que, para além de visar realçar a unidade da Matemática, evidenciando as relações entre tópicos matemáticos tradicionalmente encarados e ensinados isoladamente, visa também, precisamente, valorizar as relações da Matemática com as outras ciências e áreas da actividade.

A terceira ideia é que "as mudanças na tecnologia e o alargamento das áreas em que a Matemática se aplica resultaram em crescimento e mudanças da própria Matemática" (NCTM, 1991a, p. 9). Reconhece-se desta maneira que a Matemática vive uma fase de grande expansão e desenvolvimento, e que as solicitações das ciências e o progresso tecnológico são fontes dessa expansão e desenvolvimento. Simultaneamente, considera-se que a tecnologia, para além de ter simplificado processos de cálculo e gráficos alterou "a própria natureza dos problemas que são importantes em Matemática e os métodos que os matemáticos utilizam para os investigar" (p. 9). Por esta razão, defende-se a sua introdução no ensino, recomendando, nomeadamente, a acessibilidade de calculadoras "a todos os alunos" e a disponibilidade de um computador "em todas as aulas" (p. 9). Para além disto, é ainda sustentado que os alunos devem poder aceder a um computador sempre que pretenderem realizar trabalho individual ou de grupo e aprender a utilizá-lo "como uma ferramenta" (p. 9) no cálculo ou na resolução de problemas.

No que se refere aos assuntos matemáticos propriamente ditos, as *Normas* propõem temas comuns a todos os níveis de escolaridade, como é o caso da Geometria, da Estatística e das Probabilidades, e outros apenas para alguns níveis. O estudo dos números, das operações com números e da medida, por exemplo, é proposto para os dois primeiros níveis (K-4 e 5-8) e para os dois níveis mais avançados (5-8 e 9-12), propõe-se o estudo da Álgebra e das Funções. O tema da Matemática discreta, pouco habitual nos currículos, aparece apenas no último nível de escolaridade (9-12), com a menção de que os tópicos específicos não foram seleccionados pela sua eventual utilidade na computação mas "porque também representam ideias matemáticas úteis a assumir uma importância crescente para todos os alunos" (NCTM, 1991a, p. 211).

Os *Standards* 2000: perspectivas e orientações curriculares à entrada do século XXI. Às *Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar* (NCTM, 1991a), seguiu-se a publicação, também pelo NCTM, de outros dois documentos da mesma natureza, ainda que com conteúdos e propósitos específicos diferentes: os *Professional standards for teaching mathematics* (NCTM, 1991b) e os *Assessment standards for school mathematics* (NCTM, 1995)[1]. Os *Professional standards* incidem essencialmente sobre a figura do professor, tratando questões sobre o ensino e sobre o seu papel na análise e renovação desse ensino, bem como questões sobre a sua formação e desenvolvimento profissional. Os *Assessment standards*, abordam assuntos relacionados com a avaliação da aprendizagem, seu significado e propósito, métodos e instrumentos de recolha de dados e formas para a sua interpretação. Estes três documentos

[1] Ambos os documentos existem em tradução portuguesa da responsabilidade da Associação de Professores de Matemática (NCTM, 1994, 1999).

constituíram um quadro para a reforma do ensino da Matemática que se foi desenvolvendo nos anos noventa nos Estados Unidos da América e o primeiro, como já foi dito, teve também grande influência em movimentos reformadores de outros países.

Em meados da década de noventa, o NCTM pôs em marcha um projecto que denominou "*Standards* 2000" para a elaboração de um novo documento de orientação curricular, para a entrada do século XXI. Esse projecto, que iniciou os seus trabalhos em 1995, culminou com a publicação, no início do ano 2000, dos *Principles and standards for school mathematics*, documento programático para o ensino da Matemática desenvolvido com base na revisão e actualização dos *Standards* precedentes, procurando integrar as reflexões e críticas julgadas pertinentes face à experiência de implementação desses documentos (NCTM, 2000). Na linha dos anteriores *Standards*, o novo documento assume-se como "um recurso e um guia para todos os que tomam decisões que afectam a educação matemática" (p. ix) não superior, e apresentam-se igualmente como um documento que não se pretende prescritivo, mas com o propósito principal de proporcionar "orientação" e uma "visão" global para a Matemática escolar nas primeiras décadas do novo século (p. 6).

Os "Princípios". No essencial, os *Principles and standards*, retomam e reafirmam muitas das ideias, orientações e propostas curriculares dos documentos programáticos anteriores do NCTM, nomeadamente nas normas para o currículo e avaliação (NCTM, 1991a). Há no entanto diferenças significativas na concepção global, na estrutura e no conteúdo do novo documento, sendo desde logo de destacar a inclusão de um conjunto de "Princípios", como são designados, que antecedem a apresentação e descrição dos novos *standards*. Estes princípios proporcionam um enquadramento no que diz respeito às concepções sobre a educação e o currículo, o ensino e a aprendizagem, o papel do professor e do aluno, a avaliação e o papel da tecnologia na Matemática escolar.

São apresentados seis princípios a que é dado grande relevo, incidindo sobre seis temas considerados chave — "Equidade", "Currículo", "Ensino", "Aprendizagem", "Avaliação" e "Tecnologia" — que, no seu enunciado, consistem em afirmações genéricas não relacionadas com aspectos matemáticos específicos, mas considerados "profundamente interligados com os programas da Matemática escolar" (NCTM, 2000, p. 12). Pretendem, como é dito, descrever características de um ensino de qualidade, constituindo orientações gerais para o ensino da Matemática que são apresentadas como fundamento e guia para a tomada de decisões em diversas instâncias, nomeadamente, ao nível da elaboração e desenvolvimento curricular, ao nível da prática lectiva e ao nível da definição dos programas de desenvolvimento profissional dos professores. Os princípios propostos, de um modo geral, referem-se às ideias principais já constantes nos documentos anteriores do NCTM sobre os temas a que cada um dos princípios diz respeito, muitas vezes desenvolvendo-as e elaborando mais sobre elas, ou valorizando aspectos particulares pouco visíveis nos ditos documentos. Há também, no entanto, situações em que se abandona ou se dá menor ênfase a ideias a que anteriormente se tinha dado um relevo especial.

Nos dois primeiros princípios, por exemplo, são desenvolvidas e melhor explanadas, respectivamente, a ideia de uma Matemática para todos e a própria ideia de currículo. Na verdade, se a ideia de uma Matemática para todos estava já presente nas *Normas* de 1989[1], ela adquire maior visibilidade e importância nos *Principles and standards* com a formulação do princípio da equidade, e com a forma como ele é descrito, bem como com o relevo que lhe é dado na visão da Matemática escolar traçada neste documento: "a equidade educacional é um elemento nuclear desta visão" (p. 12). Este princípio é o de índole mais geral e sustenta que não há contradição entre excelência e equidade e que estes conceitos não são incompatíveis ou mutuamente exclusivos em educação. Afirma pelo contrário que "a excelência na educação matemática exige equidade" (p. 11), implicando esta consideração, como também é dito, a existência de "expectativas elevadas" (p. 11-13) face a todos os alunos, a oferta de oportunidades significativas a esses alunos, aceitando e integrando diferenças e proporcionando meios e recursos apropriados. Por sua vez, a ideia de currículo, a que é dedicado todo o segundo princípio, é aqui mais desenvolvida e elaborada do que nas primeiras *Normas*. Sublinha-se explicitamente a ideia de que um currículo não é um mero conjunto de actividades, dando grande ênfase a três aspectos apresentados como características importantes de um currículo: a

[1] "Durante a elaboração das *Normas*, considerámos os conteúdos apropriados para *todos* os alunos (itálicos no original). (...) Estamos convictos que os conteúdos matemáticos delineados nas normas são aqueles que todos os alunos necessitam para serem cidadãos produtivos no século XXI" (NCTM, 1991a, p. 10).

coerência e articulação curriculares, e a relevância matemática das ideias de incidência curricular principal.

Uma ideia com grande centralidade nas primeiras *Normas* era a de poder matemático, cujo desenvolvimento nos alunos aparecia como o grande objectivo curricular. Essa expressão não é usada nos *Principles and standards*, onde igualmente perdeu destaque e visibilidade uma outra ideia realçada nas *Normas* anteriores: a ideia de que saber Matemática é fazer Matemática. No novo documento, em contrapartida, sobressai a importância dada à compreensão na aprendizagem desta disciplina, como se pode depreender, nomeadamente, da particular atenção e desenvolvimento que esse aspecto mereceu no princípio sobre a aprendizagem.

Nas normas para o currículo e para a avaliação (NCTM, 1991a) recordo, distinguia-se, no que é saber Matemática, o *fazer* do *saber que*, e privilegiava-se o primeiro aspecto. No caso dos *Principles and standards*, a dicotomia é entre compreensão e memorização na aprendizagem, ou, se quisermos, entre o saber compreendido e o saber memorizado. É ao primeiro que é dada primazia, em oposição à aquisição simplesmente memorizada dos conhecimentos matemáticos, considerada dificultadora de uma aprendizagem sólida: "os alunos que memorizam factos ou procedimentos sem compreensão não têm, frequentemente, a certeza de quando e como utilizar aquilo que sabem e tal aprendizagem é muitas vezes bastante frágil" (NCTM, 2000, p. 20). A compreensão, na verdade, emerge neste documento como uma ideia unificadora nuclear, o que é visível logo nas primeiras linhas do prefácio, onde se afirma que todas as recomendações propostas "estão fundamentadas na crença de que todos os alunos devem aprender conceitos e processos matemáticos importantes com compreensão", e que esse documento pretende constituir "um argumento em favor da importância de tal compreensão e descrever maneiras de os alunos a atingirem" (NCTM, 2000, p. ix). Igualmente na formulação do princípio sobre a aprendizagem se afirma que "os alunos devem aprender Matemática com compreensão" (p. 20), sendo esta consideração assumida como pressuposto fundamental para a visão da Matemática escolar que é descrita no novo documento[1]. Afirma-se, para além disso, que aprender Matemática "exige compreender e ser capaz de aplicar

[1] "A visão da Matemática escolar nos *Principles and standards* é baseada na aprendizagem matemática com compreensão por parte dos alunos" (NCTM, 2000, p. 20).

procedimentos, conceitos e processos" (p. 20), e a compreensão é apresentada como condição ou pré-requisito facilitador do progresso da aprendizagem, bem como do desenvolvimento da autonomia dos alunos e da sua capacidade para enfrentar novas situações e resolver novos problemas.

A compreensão da Matemática é ainda associada à ideia de "competência" (*proficiency*) nessa disciplina, por sua vez relacionada com capacidade de transferência de conhecimento, ou seja, com a capacidade de utilizar adequadamente, em contextos diversificados, as aprendizagens realizadas. A compreensão de conceitos, tanto quanto o conhecimento de factos e o domínio de procedimentos, são vistos como elementos essenciais dessa competência:

> "Ser competente num domínio tão complexo como a Matemática envolve a capacidade de usar o conhecimento de forma flexível, aplicando o que é aprendido numa situação, numa outra, de forma apropriada. (...) A compreensão de conceitos (*conceptual understanding*) é uma componente da competência, junto com o conhecimento factual (*factual knowledge*) e o domínio de procedimentos (*procedural facility*)." (NCTM, 2000, p. 20)

Surgem assim equiparados na aprendizagem, os conceitos, o conhecimento de tipo factual e os procedimentos matemáticos. O desenvolvimento quer da compreensão, incidindo conjugadamente sobre estes três aspectos, quer da capacidade da sua utilização, é erigido como grande objectivo do ensino desta disciplina: "no século vinte e um, deve ser esperado de todos os alunos que compreendam Matemática e sejam capazes de a aplicar" (NCTM, 2000, p. 20).

Os novos Standards. Enquadrados pelos seis princípios referidos, são apresentados dez *standards* organizados em dois grupos. Um grupo é dedicado a temas de conteúdo matemático (*mathematical content*), contendo cinco *standards* — Números e operações, Álgebra, Geometria, Medida e Análise de dados e Probabilidades; o outro é dedicado aos processos matemáticos (*mathematical processes*) — Resolução de problemas, Raciocínio e demonstração, Comunicação, Conexões e Representação — e inclui igualmente cinco *standards*.

No primeiro capítulo dos *Principles and standards* é mencionado o facto de que as ideias dos *standards* anteriores (NCTM, 1991a, 1994, 1999) tiveram interpretações diversas e concretizações com alguma distorção, e que muitas das mudanças realizadas foram "superficiais ou incompletas" (NCTM, 2000, p. 5). Como exemplo, é considerada a implementação de certas recomendações muito valorizadas naqueles documentos — a ênfase no discurso, em tarefas matemáticas significativas, na resolução de problemas (recomendações, repare-se, incidindo sobre processos) — que, como é dito, foi realizada "sem suficiente atenção à compreensão dos alunos do conteúdo matemático" (pp. 5-6). Este problema — eventual desvalorização dos conteúdos face aos processos matemáticos — merece atenção especial no novo documento do NCTM, como parece querer dizer a indicação explícita de dois domínios em que deve incidir a aprendizagem, os conteúdos e os processos matemáticos, sempre mencionados em paralelo desde as primeiras páginas do documento, e também o facto dos cinco *standards* incidindo sobre temas matemáticos, ao contrário do que acontecia nas primeiras *Normas* (NCTM, 1991a), precederem os *standards* dedicados aos processos matemáticos. Mais revelador ainda da preocupação referida é o cuidado em sublinhar que esses dois domínios não devem ser vistos e trabalhados como domínios disjuntos, mas como áreas fortemente inter-relacionadas, "inextrincavelmente ligadas", como é afirmado no capítulo introdutório, onde se clarifica esta ideia dizendo:

> "Não conseguimos resolver problemas sem compreender e utilizar conteúdos matemáticos. Estabelecer conhecimento geométrico exige raciocínio. Os conceitos da Álgebra podem ser estudados e comunicados através de representações." (NCTM, 2000, p. 7)

Na apresentação do conjunto dos dez *standards* acrescenta-se ainda a este respeito: "os processos podem ser aprendidos no interior das Normas de Conteúdo (*Content Standards*), e o conteúdo poder ser aprendido no interior das Normas de Processo (*Process Standards*); existem muitas e ricas conexões e intersecções" (p. 30-31).

Os novos *standards* são comuns a todos os níveis escolares a que se dirigem (do pré-*kindergarten* aos doze anos de escolaridade), correspondendo à intenção expressa de proporcionar uma maior coerência e articulação curriculares, bem como à ideia de que um currículo se deve centrar sobre um núcleo de ideias matemáticas consideradas mais importantes. Nestes *standards*, os objectivos que os definem são de natureza cognitiva, incidindo sobre conhecimentos (no sentido, por exemplo, de conceitos, relações ou operações matemáticas) e sobre capacidades. Não são incluídos objectivos habitualmente associados ao campo afectivo, como, por exemplo, os que visam o desenvolvimento de atitudes de autoconfiança ou da capacidade de apreciar e valorizar a Matemática ou determinados aspectos da Matemática, e que eram muito utilizados nas normas para o currículo e para a avaliação (NCTM, 1991a).

No primeiro conjunto de cinco *standards*, sobressai, em relação às normas anteriores (NCTM, 1991a), o relevo particular do tema da medida que é estendido aos anos mais avançados da escolaridade, e a introdução, no lugar da Estatística, do tema Análise de dados (que inclui o estudo de conceitos e métodos estatísticos), dando-se assim maior visibilidade e importância a este tema. Para além disto, é ainda de referir que o estudo das Funções é incluído na Álgebra e que não é consagrado nenhum *standard* à Matemática discreta, muito embora, como é dito, os tópicos considerados mais importantes deste tema estejam contemplados no novo documento, distribuídos pelos diferentes *standards* e ao longo de toda a escolaridade (NCTM, 2000).

Em relação ao segundo grupo de *standards* dedicado aos processos matemáticos, os temas da resolução de problemas, da comunicação e das conexões matemáticas mantêm o relevo que lhes era atribuído nas primeiras normas (NCTM, 1991a). No caso da resolução de problemas já não é, no entanto, apresentada como devendo constituir a incidência principal da Matemática escolar, como vinha acontecendo desde os anos oitenta (NCTM, 1980), embora se sublinhe que deve ser considerada como "uma parte integrante de toda a aprendizagem" (NCTM, 2000, p. 52). Entre os *standards* de processo, salienta-se ainda a importância particular dada ao tema da representação matemática, uma vez que lhe é dedicado todo um *standard*, o que não acontecia anteriormente. Situação idêntica se passa no caso da demonstração, tema agora também apresentado com maior destaque, sendo explicitamente incluído num desses *standards*. Podemos ver neste facto o indício de uma sensibilidade a críticas que viam o tema da demonstração desvalorizado nas normas anteriores (Wu, 1997) e uma reacção à constatação de que alguns professores, como diz J. Kilpatrick, interpretaram a recomendação de uma menor ênfase na "Geometria euclidiana como sistema axiomático completo" e nas "demonstrações a duas colunas" constante nessas normas (NCTM, 1991a, p. 161), como "permissão para abolir completamente a demonstração para toda a gente" (Kilpatrick, 1997, p. 958).

Em síntese. De entre as perspectivas e orientações curriculares visando a renovação da Matemática escolar que se foram consolidando durante os anos noventa, algumas já com raízes no que vinha sendo proposto para essa renovação em décadas anteriores, evidenciam-se algumas tendências principais que merecem destaque, tendo como referência os documentos programáticos publicados pelo NCTM (1991a, 2000, nomeadamente). Estas tendências dizem respeito, portanto, muitas delas, à realidade educativa e social dos Estados Unidos da América, o que, por si só, não retira significado e relevância à sua consideração e estudo cuidado, em especial se se tiver em vista a análise da sua pertinência e aplicabilidade a outras realidades educativas e sociais.

Em primeiro lugar, com base no reconhecimento da relevância da Matemática no património cultural da humanidade, bem como da sua enorme importância no desenvolvimento científico e tecnológico, na vida corrente, no trabalho profissional, e no prosseguimento dos estudos e futura inserção profissional dos alunos, a renovação da Matemática escolar é defendida numa perspectiva de uma Matemática para todos. Isto não significa, no entanto uma uniformização do ensino ou uma diminuição do nível de exigência na Matemática ensinada. Na verdade, sustenta-se que todos os alunos devem aprender Matemática e conseguem aprender Matemática, e que esta consideração implica um nível elevado das expectativas do professor e uma diferenciação e apoio no ensino que tenha em conta e integre as diferenças que os alunos manifestem.

Em termos da ideia de currículo, acentuou-se a tendência para um currículo focado (*focused curriculum*), isto é, que não se disperse por uma variedade de temas e tópicos matemáticos, eventualmente de importância desigual, mas que, pelo contrário, se centre e estruture em torno de ideias matemáticas consideradas de maior relevância, valorizando, simultaneamente, a coerência e articulação curriculares. Os *Principles and standards* (NCTM, 2000), são disso um exemplo significativo quando os *standards* que propõem, para além de serem em menor número do que os anteriores (NCTM, 1991a), se referem, em cada nível de escolaridade, aos mesmos temas, seja de conteúdo, seja de processo, e os objectivos gerais de cada *standard* são também comuns a todos esses níveis, o que anteriormente não acontecia.

A forma como são encaradas algumas dicotomias clássicas na Matemática escolar, como é o caso de conteúdos *versus* processos matemáticos, conceitos *versus* técnicas ou ainda, aprendizagem conceptual *versus* conhecimento factual ou domínio de procedimentos, evoluiu, aparentemente, de modo a consensualizar perspectivas diferentes sobre essas dicotomias. Ou seja, evoluiu no sentido inclusivo, isto é, numa perspectiva em que se sustenta que os pólos dessas oposições não devem ser considerados como domínios de aprendizagem mutuamente exclusivos, mas como áreas fortemente interligadas e capazes de se fecundarem entre si na sua aprendizagem. É disto bem revelador, por um lado, a forma equiparada como são tratados os conteúdos e processos matemáticos nos *Principles and standards* (NCTM, 2000), e a recomendação aí explícita, de que devem ser trabalhados de forma integrada, sublinhando-se que os conteúdos podem ser aprendidos no contexto dos processos, e que processos não se aprendem em vazio, isto é desligados de qualquer conteúdo, exigindo, por conseguinte, o conhecimento de conteúdos matemáticos e a sua compreensão. Por outro lado, o tratamento também equiparado da aprendizagem dos conceitos e dos procedimentos, e a consideração de que, em "aliança" (*alliance*), a compreensão de conceitos, o conhecimento de tipo factual e o domínio de procedimentos — todos eles considerados componentes importantes da competência em Matemática — "torna a utilização de todas as três componentes com grande potencialidade" (NCTM, 2000, p. 20).

Uma outra ideia que ganhou um lugar de maior relevo entre as perspectivas e orientações curriculares mais recentes do NCTM, é a ideia que saber Matemática é compreender Matemática e ser capaz de a aplicar, e portanto, que a grande finalidade do ensino desta disciplina é desenvolver no aluno essa compreensão e capacidade de aplicação. A compreensão, incidindo sobre conceitos, processos e procedimentos, emerge, na verdade, como elemento unificador. Esta situação, aparentemente, sobrepõe-se à ideia de que saber Matemática é fazer Matemática, muito embora, se mantenham com importante destaque a valorização do papel do aluno na aprendizagem — por exemplo, com recomendações como a de que o aluno deve "construir activamente o novo conhecimento a partir da experiência e de conhecimentos prévios"

(NCTM, 2000, p. 20) — bem como a resolução de problemas e o raciocínio e demonstração matemáticos, esta última merecendo mesmo uma maior atenção.

Relativamente aos conteúdos matemáticos, é de referir a importância que o tema da medida vem a receber, e que a Geometria, a Estatística, numa perspectiva que valoriza a Análise de dados, e as Probabilidades, se mantêm entre os temas matemáticos a que é atribuída maior importância. Sobre os processos matemáticos, além dos acima mencionados, a comunicação e as conexões da Matemática, internas ou com domínios não matemáticos, mantêm-se entre os temas a valorizar mais nesta vertente na Matemática escolar, entre os quais, pela primeira vez, é incluído o tema da representação matemática. Por fim, a tecnologia continua a ser objecto de particular atenção, e a sua utilização uma das recomendações curriculares importantes quer em termos do ensino, quer em termos da aprendizagem da Matemática.

A Matemática ciência: aspectos do conhecimento e da actividade matemáticos

O domínio matemático: expansão e diversidade

Davis e Hersh (1981), logo nas primeiras páginas do seu livro *A experiência matemática*, chamam a atenção para a ancestralidade da Matemática nas sociedades humanas, ainda que, naturalmente, de carácter elementar nos seus primórdios. "Muito dificilmente se encontrará uma cultura", dizem-nos Davis e Hersh, "por mais primitiva que seja, que não exiba alguma Matemática rudimentar" (p. 9). Referindo-se apenas à Matemática ocidental, estes autores apresentam-nos um período de cerca de 5000 anos, desde os antigos egípcios até aos dias de hoje, durante o qual a Matemática que conhecemos se constituiu e desenvolveu. Com este longo período de desenvolvimento, a Matemática é assim, reconhecidamente, o mais antigo domínio de conhecimento científico e aquele que há mais tempo acompanha todo o empreendimento humano nas suas diferentes manifestações, estando hoje incontestavelmente presente nos mais diversos domínios da actividade humana. Por sua vez, a Matemática enquanto disciplina escolar é também a disciplina há mais tempo ensinada o que é certamente sinal da enorme importância que lhe tem sido reconhecida ao longo das várias épocas.

Na sua história, a Matemática sofreu uma grande evolução nos seus métodos, processos e técnicas, na sua organização, na sua relação com outras áreas da actividade humana e no alcance e importância das suas aplicações, e, naturalmente, na quantidade e diversidade dos domínios que incorpora. A este nível, é patente todo o progresso desde o tempo em que a Aritmética e a Geometria, tidas originalmente como as ciências da quantidade e do espaço, constituíam o essencial do universo matemático. Nos anos mais recentes, no curto período de cerca de um século, é possível constatar o enorme crescimento e diversificação deste universo, quer pelo estabelecimento de novos domínios, quer pela subdivisão dos domínios já estabelecidos a que a progressiva especialização do conhecimento conduziu.

Na verdade, uma classificação da Matemática da *Mathematical Reviews* elaborada em 1979, apresenta 60 subdivisões desta disciplina científica, englobando cerca de 3400 subcategorias, enquanto que, cem anos antes, numa outra classificação, realizada em 1868 pela *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, surgem apenas 12 subdivisões abrangendo 38 subcategorias (Davis, 1981). Compreende-se assim o matemático André Lichnerowicz (1980) quando diz que "é inegável que de há um século para cá as matemáticas explodiram" (p. 393), situando esta 'explosão', tanto no interior do seu domínio, como no seu exterior, devido ao desenvolvimento de novas possibilidades de aplicação. Aliás, de um modo mais incisivo ainda, Marshall Stone (1961) no final da década de sessenta, tinha já afirmado que "só nos últimos cinquenta anos descobriu-se mais Matemática que durante toda a sua história" (p. 16).

No terminar do século dezanove, David Hilbert apresentou uma lista de vinte e três problemas que se tornou famosa e que veio a ter grande influência no desenvolvimento recente da Matemática. É a multiplicidade e diversidade actual da Matemática que terá também levado Hao Wang (1986) a considerar que, nos dias de hoje, não se imagina a possibilidade de uma só pessoa poder elaborar uma lista de problemas como a que Hilbert fez no seu tempo.

O domínio onde se exerce a actividade matemática cresceu e diversificou-se. 'Quantidade', 'espaço', números ou formas, são conceitos que, por si sós, há muito se tornaram insuficientes para delimitar o universo da Matemática. Actualmente, reconhece-se um outro conceito mais amplo — o conceito de ordem — como mais adequado para uma delimitação do domínio matemático tal como ele hoje se nos apresenta (Steen, 1988), ideia já presente em Descartes, como se assinala no documento *Reshaping School Mathematics* (NRC, 1990). "A Matemática revela regularidades (*patterns*) escondidas que nos ajudam a compreender o mundo que nos cerca" ou "a Matemática é uma ciência da regularidade e da ordem" são expressões de um outro importante documento programático para o ensino da Matemática — *Everybody Counts* — que traduz já a influência desta tendência (NRC, 1989, p. 31) e onde ainda se pode ler:

> "Actualmente, muito mais do que Aritmética e Geometria, a Matemática de hoje é uma disciplina diversa que lida com dados, medidas e observações realizados por outras ciências; com inferência, dedução e prova; e com modelos matemáticos de fenómenos naturais, do comportamento humano e dos sistemas sociais. (...) O seu domínio não são as moléculas ou as células, mas os números, a sorte, as formas, os algoritmos e a mudança." (NRC, 1989, p. 31)

A centralidade da resolução de problemas

Investigar Matemática é uma actividade multifacetada, quer pela diversidade dos domínios matemáticos em que se exerce e das técnicas de que se socorre, quer também pelas diferentes possibilidades ou modalidades de que se pode revestir. Procurando caracterizar genericamente a investigação matemática, Moshé Flato (1990) considera que esta actividade se desenvolve com dois propósitos principais: "descobrir relações novas entre objectos matemáticos já conhecidos" e "imaginar situações ou problemáticas onde os objectos conhecidos já não são suficientes para formular os problemas" (p. 29). Trata-se de duas possibilidades para o desenvolvimento da actividade criativa em Matemática que de alguma maneira se conjugam ou interpenetram[1]. No primeiro caso, a investigação matemática consiste, por exemplo, em demonstrar uma conjectura ou em resolver um problema ainda em aberto, no quadro das teorias estabelecidas e usando os métodos, processos e técnicas disponíveis. No segundo caso, trata-se de conceber novas situações que tornam necessário o desenvolvimento de novos quadros teóricos e, eventualmente, de novas técnicas matemáticas para a formulação e resolução de problemas.

O esforço de descoberta de novas relações matemáticas, pela demonstração de uma conjectura ou resolução de um problema, pode no entanto conduzir também ao desenvolvimento de novas teorias e técnicas matemáticas. Por sua vez, ao estabelecimento de uma nova problemática, seguir-se-á, naturalmente, o desenvolvimento de uma actividade matemática do primeiro tipo. Num e noutro caso, a formulação e resolução de problemas surgem como elementos essenciais da actividade matemática criativa. Mesmo na segunda situação, em que a actividade do matemático consiste em "imaginar situações ou problemáticas", é a necessidade de formulação de problemas que leva à pesquisa dessas situações novas onde o que num dado momento se conhece em Matemática, por si só, já não basta para essa formulação.

Analisando a forma como a Matemática progride, M. Flato apresenta também duas modalidades que considera muito distintas para esse progresso. Em sua opinião, a Matemática desenvolve-se por um lado, através da resolução de problemas e, por outro, pela elaboração de teorias. Socorrendo-se da terminologia anglo-saxónica, divide os matemáticos em dois grupos, consoante o tipo de actividade que desenvolvem: os "solucionadores de problemas" (*problem-solvers*) e os "criadores de teoria" (*theory-makers*). No primeiro caso, diz-nos o autor, a actividade dos matemáticos consiste em resolver problemas de origem diversa (interna ou externa à Matemática), e a Matemática progride através da resolução desses problemas formulados com base em teorias já estabelecidas mas cuja solução estava no entanto ainda por encontrar. No segundo caso, a actividade dos matemáticos consiste em "construir novas teorias" e o progresso da Matemática realiza-se pela aquisição de uma nova forma de ver, por "uma

[1] Isto independentemente de se considerar, como o faz M. Flato, a primeira possibilidade associada ao desenvolvimento interno da Matemática e a segunda, ao desenvolvimento da Matemática motivado por influência exterior.

definição de estruturas que enriquecem a Matemática e abrem a possibilidade de pensar e resolver novos problemas" (p. 38).

Num caso e noutro, a resolução de problemas ocupa um lugar central na actividade do matemático e é um factor de progresso da Matemática, não só pelas aquisições a que dá origem, graças às soluções encontradas, mas também pelo desenvolvimento das técnicas matemáticas que origina e pelas teorias cuja elaboração motiva. Se o desenvolvimento de teorias matemáticas novas conduz à formulação de novos problemas, reciprocamente, o esforço na resolução destes problemas pode, por sua vez, conduzir ao desenvolvimento de novas teorias. Podemos assim compreender Alan Schoenfeld (1992) quando afirma que, mesmo constatando alguma disparidade entre as concepções dos matemáticos relativamente à resolução de problemas, é possível considerar consensual o ponto de vista segundo o qual "o trabalho dos matemáticos (...) é resolver problemas" (p. 339). Ou, a afirmação de que são os problemas, "os grandes problemas", como diz A. Weil, "que fornecem o alimento quotidiano com o qual o matemático se desenvolve" (Fang, 1970, p. 109).

É esta centralidade da resolução de problemas na actividade matemática que o matemático Paul Halmos (1980) sublinha quando afirma que "a principal razão de existir de um matemático é resolver problemas e que, por isso, aquilo de que *verdadeiramente* a Matemática consiste, é de problemas e das suas soluções" (itálico no original, p. 519). Este matemático considera que os outros ingredientes, como lhe chama — axiomas, definições, teoremas, demonstrações, etc. — são certamente essenciais, mas sustenta que nenhum deles está no "coração da Matemática"[1], lugar que reserva para a resolução de problemas.

O ponto de vista matemático

A Matemática, segundo determinadas perspectivas, é vista essencialmente como uma prática ou actividade social que ocorre no seio de uma comunidade, a comunidade dos matemáticos. Philip Kitcher (1986a), utilizando em Matemática os desenvolvimentos da filosofia da ciência, retoma as ideias de Kuhn defendendo uma perspectiva no estudo da evolução do conhecimento matemá-

[1] Halmos (1980) usa esta expressão como título de um artigo que encerra recomendando que os problemas devem merecer um relevo cada vez maior no ensino da Matemática.

tico que dá ênfase ao que chama "prática matemática" (*mathematical practice*). Para esta prática propõe cinco componentes: "uma linguagem, um dado conjunto de proposições, um dado conjunto de raciocínios, um conjunto de questões seleccionadas como importantes e um conjunto de perspectivas metamatemáticas" (p. 163). Estas perspectivas dizem respeito às normas para as definições e demonstrações, às finalidades e à estrutura da Matemática e ainda ao valor relativo dos diversos tipos de investigação que se realizam em Matemática. Trata-se assim de um conjunto de pontos de vista que, numa dada época, uma comunidade matemática aceita e com base nos quais decide, por exemplo, o que é ou não uma definição ou demonstração, ou até que ponto uma ou outra podem ser consideradas rigorosas; ou, descreve a Matemática no seu conjunto, com os seus vários domínios e subdomínios, decidindo o que faz parte ou não da Matemática; ou, ainda, estabelece a maior ou menor relevância da investigação que se realiza numa ou noutra área matemática.

Para Kitcher (1986b) todo o trabalho dos matemáticos é mediatizado pelas perspectivas metamatemáticas assumidas que, como diz, "podem variar de comunidade para comunidade, e que representam a sua compreensão reflexiva sobre como os objectivos mais importantes podem ser atingidos" (p. 189). Estas perspectivas, segundo o autor, são socialmente adquiridas e desenvolvem-se no seio da comunidade dos matemáticos que as incorporam muito cedo na sua formação. Esta componente da prática matemática, assim entendida, funciona como enquadramento geral e orientação da actividade do matemático e podemos também reconhecer nela elementos do que Alan Schoenfeld (1992) designa por "ponto de vista matemático".

Também para Alan Schoenfeld, a Matemática é uma "actividade inerentemente social" (p. 335) ou "uma actividade de produção de significado, socialmente construída e socialmente transmitida" (p. 339). Nesta actividade, diz-nos, os seus praticantes investigam as regularidades em sistemas definidos axiomaticamente ou em sistemas abstraídos do mundo real — é a Matemática considerada ciência das regularidades (*science of patterns*), como também Schoenfeld lhe chama — usando como instrumentos a abstracção, a representação simbólica e a manipulação simbólica. O domínio destes instrumentos, em sua opinião, não basta no entanto para caracterizar o pensamento matemático; aprender a pensar de forma matemática significa adquir uma competência e uma perspectiva específicas da Matemática. A primeira, consiste na mestria dos referidos "instrumentos do ofício" e a sua utilização para a compreensão da Matemática; a segunda, significa possuir "um ponto de vista matemático" que se traduz na capacidade de "apreciar os processos de matematização e abstracção e ter preferência em aplicar esses processos (p. 335).

Este ponto de vista matemático — "o ver o mundo como os matemáticos o fazem" (Schoenfeld, 1992, p. 340) — é considerado por Alan Schoenfeld como uma "componente fundamental" da forma de pensar matemática, sendo caracterizado por um conjunto determinado de "hábitos e predisposições", "padrões de pensamento, afecto e acção", "modos de pensar e de ver" e "valores e perspectivas" (p. 341). Exemplificando para o caso da Matemática, o autor, inclui, como elementos de uma predisposição numa pessoa para esta ciência (*mathematical disposition*), a "preferência para quantificar e construir modelos" e o "hábito em ver os fenómenos em termos matemáticos" o que, segundo o autor, se pode verificar pela natureza matemática das questões que coloca perante um fenómeno ou situação e da linguagem utilizada, bem como pela existência de "padrões típicos de raciocínio matemático" na sua abordagem dos problemas (p. 341).

Destacam-se, assim, a este respeito, duas ideias essenciais. Em primeiro lugar, a ideia de que saber Matemática e pensar matematicamente integram um conjunto de concepções e preferências relativas à Matemática e à investigação matemática — o ponto de vista matemático — que, de algum modo, são condição desse saber e pensar matemáticos. Em segundo lugar, que este ponto de vista matemático se adquire e desenvolve em interacção como os membros da comunidade a que se pertence e que, sendo socialmente construído, introduz no conhecimento uma componente social.

Lógica e intuição

A apresentação euclidiana deu à Geometria o estatuto de ciência da demonstração por excelência e, desde aí, não mais se deixaria de associar, à actividade matemática, o raciocínio dedutivo, entendido como o encadeamento lógico de proposições que partem de um conjunto de premissas (ou axiomas) que se sabem (ou supõem) verdadeiras, até à conclusão final que assim assume o carácter de verdade necessária. A Geometria tornou-se, deste modo, o terreno privilegiado para o exercício do pensamento lógico, ao mesmo tempo que, sendo o primeiro sistema dedutivo a ser formalizado, vai servir de modelo a outros sistemas deste tipo e estender, a todos os domínios da Matemática, a ênfase nos aspectos dedutivos (Davis, 1981). Dedução, rigor, lógica, aparecem assim indissociáveis da Matemática e do pensamento matemático e, mais do que isso, sobrepondo-se a outros aspectos, tendem a esgotar, por si sós, a caracterização da actividade matemática.

Henri Poincaré (1970), ao analisar a natureza do raciocínio matemático, põe em causa o carácter exclusivamente lógico e dedutivo da Matemática. Se tal se verificasse, se todas as proposições matemáticas se extraíssem umas das outras com recurso às leis da lógica, a Matemática, diz-nos, não seria mais do que uma "imensa tautologia" e todos os seus teoremas "maneiras diversas de dizer que A é A" (p. 21). Num raciocínio dedutivo, a verdade da conclusão está contida nas premissas; por isso, os silogismos nada acrescentam aos axiomas de que se parte e, desse modo, como Poincaré sublinha, só estaríamos perante um novo teorema se partíssemos de um conjunto de axiomas novo. Se não é isto que acontece, então, diz-nos este matemático, há que reconhecer uma "virtude criadora" (p. 22) no raciocínio matemático que não existe no raciocínio puramente dedutivo. Poincaré vê esta virtude no princípio de indução matemática que, utilizando a terminologia kantiana, considera "um verdadeiro juízo sintético *a priori*" (p. 32) e cuja evidência justifica, considerando-o como provindo de uma "intuição directa" do espírito ou como "a afirmação de uma propriedade do próprio espírito" (p. 33). Segundo Poincaré, esta intuição[1] que está na base do raciocínio por recorrência e confere ao matemático a possibilidade de proceder indutivamente, do particular para o geral, constitui a condição de progresso em Matemática.

No entanto, há diferenças entre os matemáticos no que se refere à actividade que realizam, à forma como abordam assuntos novos. A este respeito, Poincaré (1908) divide-os em dois grandes grupos que identifica como "analis-

[1] Poincaré (1908), referindo-se à intuição matemática, considera-a como "uma sensibilidade (*sentiment*) que nos faz adivinhar as relações e harmonias [matemáticas] escondidas" (p. 360). Será assim uma espécie de faculdade de adivinhação que permite captar a ordem matemática, manifestando-se sob a forma de "inspirações" ou "iluminações súbitas" que apresentam sempre "as mesmas características de instantaneidade e de certeza imediata" (p. 363).

tas" e "geómetras", não por se dedicarem à Análise ou Geometria, mas por se socorrerem essencialmente da lógica ou da intuição, respectivamente, no trabalho que realizam, qualquer que seja a área matemática a que se dedicam. Esta divisão[1] corresponderá, no fundo, aos dois estilos ou tendências do pensamento que Hilbert diz podermos encontrar na investigação em qualquer domínio científico: "a tendência para a abstracção, visando cristalizar as relações lógicas subjacentes no labirinto do material em estudo e reorganizar este material de modo sistematizado e ordenado", e, "a tendência para a compreensão intuitiva, proporcionando uma compreensão mais imediata dos objectos estudados, uma relação viva com eles que, por assim dizer, sublinha a significação concreta dessas relações" (Hilbert, 1990, p. iii). É também a divisão que Hadamard (1954) faz entre os matemáticos que pensam de uma maneira "puramente algébrica" e os que o fazem "necessitado sempre de uma representação figurativa" ou de "uma construção", mesmo se as consideram "pura ficção" (p. 86).

Lógica e intuição caracterizam, assim, abordagens distintas em Matemática, dois modos de pensar, correspondendo, como diz Poincaré (1908), a espíritos de natureza diferente, igualmente necessários ao desenvolvimento do conhecimento científico: "a lógica e a intuição têm, cada uma delas, o seu papel. Ambas são indispensáveis. A lógica, que por si só nos pode fornecer a certeza, é o instrumento da demonstração; a intuição é o instrumento da invenção" (p. 29).

Considerando que nada de novo se poderá criar com recurso exclusivo à lógica e que, portanto, nenhuma ciência poderá crescer apenas com recurso a ela, Poincaré (1948, 1970) recorre à intuição para explicar a criação matemática. Distingue no entanto diferentes tipos de intuição, referindo-se em particular à intuição sensível como sendo a que repousa na experiência, nos dados dos sentidos, e a um outro tipo de intuição — "a intuição do número puro" — que não recorre a esse testemunho e que até muitas vezes o contraria[2]. É este último

[1] Leone Burton (2001) encontra nos matemáticos que estudou um terceiro estilo de pensamento que distingue dos dois aqui mencionados. Designa-o por estilo conceptual e apresenta-o como sendo aquele em que o pensamento recorre preferencialmente, não a símbolos (estilo analítico) ou a figuras (estilo visual ou geométrico) mas a ideias e a processos de classificação.

[2] Poincaré (1948) interroga-se sobre quão separados estarão estes dois tipos de intuição e se, realmente, a intuição do número puro não recorrerá ela também à experiência. Não aborda contudo esta questão pois, em sua opinião, é "assunto para psicólogos e metafísicos" (p. 32). Considera, no entanto, as duas espécies de intuição essencialmente diferentes uma vez que incidem sobre objectos diferentes e envolvem faculdades distintas do nosso espírito.

tipo de intuição que, segundo Poincaré (1948), orienta o trabalho dos matemáticos analistas, ou seja, dos matemáticos de espírito lógico, e faz com que também eles possam "não só demonstrar mas também inventar[1] (p. 33). A intuição sensível é a que serve os geómetras no seu trabalho criativo e Poincaré considera-a "o instrumento de invenção mais vulgar" (p. 34) em Matemática.

A lógica e a intuição estão presentes na actividade matemática, a primeira desempenhando uma função essencialmente certificadora e organizadora e a segunda, uma função essencialmente criadora. A lógica tem um papel fundamental na organização e sistematização da Matemática enquanto corpo de conhecimentos, mas não explica o seu crescimento, nem está na base da actividade matemática enquanto actividade criativa. Inúmeros matemáticos têm também disto dado testemunho. Para A. Weil, por exemplo, a lógica pode ser a "higiene" do matemático mas "não é aquilo que o alimenta" (Fang, 1970, p. 109). Joong Fang (1970) considera que, se um matemático pretender ser criativo e realmente descobrir algo de novo terá que arriscar-se pelos caminhos incertos da "tentativa-e-erro", em novas direcções ou procurando novas ideias, terá que fazer conjecturas, "experiências de pensamento (*thought experiments*) em termos matemáticos" (p. 118), como lhes chama. Morris Kline (1970), como Poincaré, considera que com a lógica nada se descobre em Matemática e que, se a lógica pode constituir uma "norma" ou "obrigação" em Matemática, "ela não é a essência" (p. 272) desta ciência.

Trabalho individual e colaboração

Como vimos, não há uniformidade na forma como os matemáticos abordam assuntos novos e Poincaré (1948) agrupa-os em analistas e geómetras, consoante a primazia que têm, nessa abordagem, a lógica ou a intuição. Do mesmo modo, Hilbert (1990), como igualmente foi referido, salienta esta divisão entre os matemáticos, que alarga aos outros cientistas, distinguindo entre uma

[1] Como Poincaré (1908) assinala, uma demonstração não é meramente uma justaposição de silogismos e a ordem pela qual estes estão dispostos é mais importante que os próprios silogismos; considera que esta ordem pode ser intuída e que é a sua intuição que possibilita "a compreensão num relance do conjunto do raciocínio" (p. 360). Podemos assim dizer que a intuição, está na base da actividade criativa, da descoberta e invenção matemáticas, mesmo quando está em jogo a demonstração de um teorema.

tendência para a abstracção e uma tendência para a compreensão intuitiva no trabalho de investigação que realizam.

Mais recentemente, também Moshé Flato (1990) considera possível agrupar os matemáticos em dois grandes grupos "muito diferentes", de acordo com o modo como realizam a sua actividade de investigação. Num primeiro grupo, que identifica como "newtoniano", inclui os matemáticos que trabalham sobre o contínuo e numa relação privilegiada com a mecânica. Tratam-se, como nos diz, de matemáticos que, "partindo de equações diferenciais, são sempre capazes de imaginar um modelo mecânico subjacente ao seu pensamento" (p. 32). Num segundo grupo, que sugere poder denominar-se "pitagórico", inclui os matemáticos que trabalham com o discreto, como a teoria dos números, e em que o seu pensamento, "mais abstracto", não tem qualquer suporte mecânico. Podemos reconhecer aqui também a divisão proposta por Poincaré e Hilbert que, como eles, Flato considera corresponder a "duas tendências profundas e persistentes do pensamento matemático" (p. 33). Este último autor, no entanto, salienta que as duas tendências sempre mantiveram relações estreitas e que hoje em dia estão cada vez mais próximas uma da outra. Em sua opinião, a maioria das aquisições actuais mais ricas da Matemática tem origem em domínios diferentes em cujo cruzamento "mergulham as suas raízes, daí se alimentando e integrando-os numa espécie de multidisciplinaridade interna à Matemática" (p. 33). O exemplo que nos dá é a noção de grupo nascida do "pensamento discreto", cujas raízes penetraram hoje no "pensamento contínuo", tendendo a unificar áreas matemáticas cuja evolução decorreu sempre de forma muito separada.

Na sua evolução, o conhecimento matemático tem sofrido um processo de progressiva especialização, como tem acontecido com todo o conhecimento científico. A esta especialização ou movimento analítico e desagregador, tem vindo a contrapor-se um movimento agregador, sintético, uma tendência de unificação da Matemática. Além disso, se por um lado a especialização concorre para uma situação de incomunicabilidade entre domínios cada vez mais especializados e entre os especialistas que aí trabalham, por outro lado, como diz Flato (1990), dá origem a domínios ainda mal definidos cujo estudo obriga ao esforço conjunto de especialistas de áreas diversas, muitas vezes organizados em equipas de trabalho.

Uma ideia muito divulgada é a de que o matemático trabalha sozinho e de que, nesse trabalho, lhe bastam os livros e papel e lápis. Em outras ciências fala-se em trabalhos realizados por dois ou mais cientistas, em equipas de investigação, em laboratórios e equipamento sofisticado. É o que Jean Dieudonné (1990a) defende quando afirma que, ao contrário das ciências experimentais, a Matemática não se faz num laboratório; para fazer investigação matemática, diz-nos, "são apenas necessários uma folha de papel e uma boa biblioteca" (p. 24). Este matemático considera ainda que, em Matemática, o trabalho de pesquisa tem, geralmente, carácter individual enquanto que nas ciências experimentais a investigação é conduzida por equipas. Em sua opinião, isto acontece pela necessidade que os matemáticos têm de reflectir "em silêncio e na solidão" (p. 24), o que no entanto, acrescenta ainda, não significa que não existam trabalhos de cooperação que assumem principalmente o carácter de troca de ideias e confronto de resultados obtidos em trabalho isolado. Na verdade, diz-nos Dieudonné, "são raros os matemáticos (...) que podem trabalhar muito tempo e de modo frutífero em quase completo isolamento; (...) a maior parte desencoraja-se se não tiver meio de comunicar frequentemente com os seus colegas (...) tanto mais que a natureza abstracta das suas pesquisas torna difícil a troca de ideias com não matemáticos (p. 24). Para Dieudonné, portanto, a actividade matemática é de natureza essencialmente individual e o trabalho em equipa, intencional e sistemático, não parece ser uma característica essencial do trabalho dos matemáticos. No entanto, não significa que não reconheça na comunicação e interacção entre os matemáticos, um papel importante nessa actividade, funcionando como estímulo e fonte de ideias.

Também Moshé Flato (1990) reconhece que tradicionalmente os matemáticos trabalham quase sempre sozinhos e "em geral sem necessidade de mais equipamento que papel, lápis e uma biblioteca, para o seu trabalho de investigação propriamente dito" (p. 24). Todavia, combatendo a ideia de que só nas ciências ditas experimentais se pratica o trabalho de cooperação ou em equipa, este matemático chama a atenção para a existência, cada vez mais frequente, de problemas para cuja resolução concorrem especialistas de diversas áreas matemáticas. Este concurso, como nos diz, "é por vezes voluntário e organizado no quadro de um trabalho de equipa, mas é também, com muita frequência, simplesmente uma espécie de confluência: cada um, em domínios que podem ser muito diversos, colocando a sua pedra no edifício, até que um arquitecto brilhante gize uma construção original" (p. 25). O processo de especialização que tem vindo a acontecer na Matemática faz surgir problemas novos em zonas onde se encontram domínios ainda mal definidos. Estes problemas obrigam ao trabalho conjunto de matemáticos de diferentes áreas e, por esta razão, diz-nos Flato, nos dias de hoje, "ainda que o essencial das actividades matemáticas permaneça constituído pelo trabalho de pesquisa individual, acumulam-se os exemplos de tais trabalhos colectivos" (p. 27).

Sobre o lugar e a importância do trabalho de colaboração em investigação matemática, Alan Schoenfeld (1992) vai mais longe e considera que esta forma de trabalho em Matemática constitui uma das alterações significativas na prática dos matemáticos nas últimas décadas. Para este autor uma das três mudanças recentes a este nível "consiste em que fazer Matemática é visto cada vez mais como um acto social e de colaboração" (p. 344). Schoenfeld dá vários exemplos onde a actividade matemática assumiu uma forma "de elevada colaboração": na teoria dos números, nos desenvolvimentos matemáticos associados a tomografia assistida por computador e na demonstração de algumas conjecturas. Os testemunhos que reproduz, evidenciam o reconhecimento do trabalho de colaboração como fonte de prazer e entusiasmo, como fonte de estímulo e de maior eficácia, contribuindo para que os intervenientes se ultrapassem a si próprios e para a complementaridade das contribuições de cada interveniente. No entanto, para lá destas virtudes, diz-nos este autor, há hoje perspectivas sobre o conhecimento que reconhecem à prática de colaboração um papel mais importante e de natureza epistemológica, sustentando que pertencer a uma comunidade matemática "é uma parte daquilo que constitui o saber e o pensamento matemático" (p. 344).

O trabalho individual tem sido e continuará certamente a ser uma componente essencial no trabalho dos matemáticos. Se, historicamente, os exemplos de trabalho conjunto em Matemática poderão ser considerados de excepção — e os casos mais citados são os trabalhos de Russel e Whitehead e de Hardy e Littlewood — a ideia de que o trabalho em equipa não faz parte da forma de trabalhar dos matemáticos, parece não corresponder à situação actual em investigação matemática. Há cada vez mais exemplos de áreas onde essa forma de trabalho se pratica, o que também se evidencia pela autoria partilhada dos artigos de investigação publicados. Leone Burton (1999) considera que "um dos resultados mais importante" do seu estudo é a constatação de que a pesquisa em Matemática nos dias de hoje deixou de ser exclisivamente caracterizada por uma prática individualista, desenvolvendo-se num ambiente em que a "colaboração ou cooperação são predominantes" (p. 137). A interacção entre os matemáticos, todavia, sempre existiu — basta pensar na correspondência que estabeleciam em épocas mais antigas — mas é actualmente mais extensa e intensa devido ao desenvolvimento dos meios de comunicação e à evolução tecnológica em geral. Esta interacção e a comunicação do conhecimento matemático que lhe está associada têm vindo a ser consideradas elementos importantes no processo de constituição e desenvolvimento desse conhecimento.

Fontes de conhecimento e motivações do matemático

Os problemas e a sua resolução ocupam, como vimos, um lugar central na actividade matemática. A. Weil considerava que o principal alimento do matemático são os problemas (Fang, 1970) e, para Paul Halmos (1980), os problemas são o coração da Matemática. Aonde vai o matemático buscar a inspiração para a formulação e resolução desses problemas? O que o motiva essencialmente nessa sua actividade?

Numa entrevista, o matemático Andrzej Turowics, considerava que, no seu caso, "a razão para o trabalho de investigação era a curiosidade" (Ciesielski e Pogoda, 1988, p. 17). Também Dieudonné (1990a) caracteriza o matemático pela sua "insaciável curiosidade", pelo seu empenhamento e persistência em resolver os problemas em estudo, ou "por um desejo de resolver os problemas que ronda a paixão" (p. 22) que por vezes o faz alhear do mundo que o cerca. Em geral, acrescenta, só assim se consegue o resultado procurado, depois de "períodos de concentração intensa e sustentada que se repetem por vezes durante meses ou anos" (p. 22). "A razão principal que leva um matemático a fazer investigação", diz ainda Dieudonné (1990b), socorrendo-se de G. Hardy, "é a curiosidade intelectual, a atracção pelos enigmas, a necessidade de conhecer a verdade" (p. 40), acrescentando à curiosidade, a vontade de desvendar mistérios e a procura da verdade, como motivações do investigador.

Ainda relativamente às motivações dos matemáticos para o seu trabalho de investigação, o matemático citado, G. Hardy, é na verdade radical a respeito do lugar da eventual utilidade prática da Matemática e está mesmo persuadido que não é o desejo de ser útil à sociedade que faz mover esses cientistas. Hardy (1988) vai mesmo ao extremo de negar qualquer utilidade prática dos resultados das suas investigações: "nunca fiz nada de 'útil'[1]", afirma, acrescentando que todas as suas descobertas não tiveram qualquer contribuição, "directa ou indirecta, para o bem ou para o mal", relativamente ao bem-estar do mundo e que, do ponto de vista prático, "o valor da [sua] vida como matemático não é nenhum" (p. 2013).

No que se refere à origem dos problemas que interessam aos matemáticos Dieudonné (1990b) afirma, temperando com um "quase sempre", que ela deve ser procurada nas relações entre os matemáticos, não reconhecendo nenhum papel essencial à "influência do meio social ambiente" (p. 39). Considera, aliás, que a tentativa de ver nessa influência uma "explicação universal" para o desenvolvimento do conhecimento, lhe parece um dogma "perfeitamente absurdo" (p. 39). Este autor, no entanto, reconhece que uma boa parte da Matemática se desenvolveu pelo esforço em dar resposta a problemas que surgiram em outras ciências, nomeadamente na Física — "poder-se-á (...) dizer sem hesitação que foram as necessidades da Física que levaram os matemáticos a criar um novo ramo da sua ciência" (p. 33) — e salienta a importância de determinadas contribuições importadas de outras áreas científicas para o desenvolvimento de certos métodos e domínios matemáticos. Assim, Dieudonné não recusa uma influência exterior, com origem nas necessidades que as outras ciências colocam, no desenvolvimento da Matemática. Em sua opinião, no entanto, essa influência não constitui uma explicação global — "Há toda uma parte *importante* (itálico no original) da Matemática que surgiu para fornecer modelos às outras ciências e não está em causa minimizá-la; mas não constitui

---

[1] J. R. Newman (1988) considera que estas afirmações de Hardy são um "contra-senso" e que com certeza o próprio Hardy o saberia. "Contribuições como as dele", diz-nos Newman, "são certamente úteis; inesperadamente e, tendo em conta o mundo de hoje, talvez mesmo desagradavelmente úteis" (p. 2000). Acrescenta ainda que o próprio Hardy parece ter desenvolvido uma contribuição para a genética relativamente a um problema de transmissão de caracteres, conhecida como Lei de Hardy, que veio a verificar-se ser de "importância central" em outras situações e problemas (no estudo de grupo sanguíneos RH e no tratamento dos recém nascidos hemolíticos).

mais do que 30 a 40 por cento do conjunto da Matemática contemporânea" (p. 40) — e a maior parte da Matemática desenvolve-se obedecendo a leis internas que lhe são próprias.

Há assim bastante afinidade entre os dois matemáticos referidos quer quando não reconhecem a utilidade prática dos resultados do trabalho dos matemáticos como motivação para esse trabalho, quer quando valorizam o que habitualmente se designa por Matemática pura face à Matemática dita aplicada, relegando para segundo plano o papel de influências externas no desenvolvimento da Matemática. Numa outra perspectiva situa-se Hao Wang (1986) que, entre os elementos que influenciam o desenvolvimento da actividade matemática, inclui aspectos de natureza social que lhe são exteriores, como aspectos éticos, políticos e sociológicos. Este autor vai ao ponto de reconhecer que, tal como acontece em qualquer área de actividade, não se pode negar que "as modas e personalidades fortes têm influência na Matemática" (p. 150). Todavia, para Wang, o desenvolvimento da Matemática, do ponto de vista da sua evolução global, "é determinado por factores mais objectivos como as aplicações fundamentais e o interesse conceptual intrínseco" (p. 150) das teorias matemáticas.

Reconhece-se assim que a Matemática se desenvolve quer por solicitações internas, quer por solicitações externas. No primeiro caso, o desenvolvimento procede segundo uma lógica própria da Matemática, os problemas surgem no seu interior e a sua resolução prossegue independentemente de qualquer possível aplicação dos resultados que se venham a obter. No segundo caso, são solicitações exteriores que motivam desenvolvimentos matemáticos com dois tipos de consequências. Umas vezes, conduzem à elaboração de modelos para resolver o problema colocado — parte-se do exterior da Matemática, elabora-se no seu interior e regressa-se ao exterior. É o caso que Flato (1990) descreve nos exemplos que apresenta da Física newtoniana: "uma situação em que se vai "da Física à Física passando pela Matemática" (p. 31). Outras vezes, influências exteriores conduzem à incorporação, na Matemática, de elementos que lhe são externos, como no exemplo que o mesmo autor apresenta, em que a Matemática foi buscar inspiração à teoria física dos campos, situação em que, desta vez, "se vai da Matemática à Matemática passando pela Física" (p. 31).

Diversos matemáticos reconhecem esta dupla fonte do conhecimento matemático, valorizando o papel da realidade e das outras ciências no desenvolvimento da Matemática. Hermann Weil (1988), por exemplo, apresenta o modo de pensar matemático como possuindo duas facetas ou componentes. A primeira, exprimindo um movimento da Matemática para o seu exterior através do qual ela se relaciona com o mundo real. É assim, segundo o autor, uma forma de pensar através da qual a Matemática "penetra nas ciências do mundo exterior (...) e mesmo nos nossos pensamentos e assuntos quotidianos" (p. 1805); a segunda, dizendo respeito ao tipo de pensamento que o matemático "entregue a si próprio, usa no seu próprio campo" (p. 1805), e que, portanto, ocorre no interior da Matemática. John von Neumann (1988), por sua vez, vê na relação que a Matemática tem com as ciências naturais, a sua característica mais vital e considera as ciências da natureza as grandes inspiradoras das ideias matemáticas, a fonte das "melhores" dessas ideias, mesmo das que nos aparecem como das mais puramente matemáticas. "Muita da melhor inspiração Matemática provém da experiência" (p. 2035), escreveu Neumann, dizendo ainda que "é inegável que muitas das melhores inspirações em Matemática — em partes consideradas como da Matemática mais pura que possamos imaginar — vieram das ciências naturais" (p. 2030).

Para qualquer destes matemáticos a relação da Matemática com a realidade e as outras ciências assume importância vital para o seu desenvolvimento. É também a posição de M. Flato (1990) que considera que o trabalho dos matemáticos que se isolam numa Matemática sem qualquer relação com outras áreas científicas está condenado à esterilidade. Para Hermann Weil (1988), a dupla fonte do conhecimento matemático é o que lhe garante a sua vitalidade. Apesar da já longa idade e cada vez maior complexidade da Matemática, considera que esta ciência continua ainda "intensamente viva" e o que a mantém são "as suas profundas raízes na mente e na natureza" (Weil, 1988, p. 1821). Von Neumann (1988), pelo seu lado, considera inclusivamente que as ideias matemáticas têm uma origem empírica, nem que seja muito remota e indefinida. Essas ideias adquirem vida própria e verifica-se uma espécie de esquecimento das suas origens, parecendo que o seu desenvolvimento e evolução são governados apenas por critérios interiores à Matemática, em particular critérios estéticos. Neumann vê neste esquecimento um perigo de degenerescência levando a que a Matemática "se separe numa multitude de ramos insignificantes e assim se torne numa massa desorganizada de detalhes e complexidades" (p. 2038). Por isso recomenda um "regresso às origens, a injecção de ideias de carácter empírico mais ou menos directo" (p. 2039) sempre que tal situação se verifique, para que assim se conserve a "frescura e vitalidade" da Matemática.

V — Os matemáticos

Manuel Silva

Manuel Silva foi o primeiro matemático a ser contactado para participar no estudo e também o primeiro a ser entrevistado. Inteirado das razões do meu interesse na entrevista, bem como das linhas gerais do tema e objectivos principais desta investigação, aceitou satisfazer o meu pedido sem qualquer hesitação. Pareceu-me mesmo tê-lo ouvido, num ligeiro gesto de assentimento, concordar comigo quando referi que, para o estudo que pretendia realizar, me era indispensável contactar com matemáticos.

De acordo com o interesse que Manuel Silva manifestou, as entrevistas decorreram no seu local de trabalho mais habitual, tendo sido combinadas com antecedência e confirmadas no dia anterior à sua realização. Quando cheguei ao sítio combinado para a primeira entrevista, avistei-o junto à portaria e reparei que, mal deu por mim, se dirigiu às portas de vidro da entrada que abriu para eu entrar. Recebeu-me de modo muito afável e simpático, informando-me que tinha descido para obter a chave da sala do "seminário", a sala que tinha escolhido para a entrevista pois pensava que estaríamos aí mais à vontade do que no seu gabinete. Achava que assim não incomodaríamos ninguém e teríamos também menor probabilidade de ser incomodados.

A sala, um pequeno auditório que ficava no primeiro piso do edifício, tinha paredes claras, uma delas atravessada por janelas a toda a largura, o que lhe dava uma boa iluminação, e um quadro preto. Mobilava-a meia dúzia de filas de cadeiras azuis e uma mesa grande, à frente, onde nos sentámos. Ocupámos um canto da mesa, posição óptima, quer para falarmos um com o outro, quer para a gravação. A conversa que trazíamos desde a entrada continuou por mais alguns momentos, até que tomei a iniciativa de abrir a pasta e tirar o gravador e o material de apoio, dando assim início à entrevista.

Toda a nossa conversa correu bem, com calma e com pouca intervenção da minha parte. Manuel Silva assumiu a sua condição de entrevistado de uma forma facilitadora, respondendo sempre às questões que lhe ia colocando com ar interessado e evidenciando vontade em colaborar. Falou bastante e, do que dizia, transpareceu sempre muita autenticidade. As respostas foram sempre prontas, com intervenções, em geral, relativamente longas, mostrando convicção e segurança relativamente às ideias e opiniões que manifestava. Sobre alguns aspectos — origem dos conhecimentos matemáticos, relação da Matemática com a realidade, invenção ou descoberta em Matemática, características da actividade matemática — não se alongou muito.

Mantendo um ar em geral sério que, diga-se, me parece ser-lhe característico, sorriu por inúmeras vezes quando falava, denotando mesmo algum entusiasmo ou entrega no que dizia. Nunca me apercebi de qualquer sinal de enfado, contrariedade ou desagrado durante a entrevista, que acabou por ser relativamente longa, embora dentro da duração prevista, cerca de uma hora e meia. Durante a conversa, Manuel Silva teve a chave da sala quase sempre na mão e agitava-a com frequência, enquanto respondia. Fomos interrompidos uma vez, por muito pouco tempo, por alguém que precisava da sala, mas o problema acabou por ser resolvido sem termos que a abandonar. O ruído dos aviões que passavam perto obrigou a uma ou outra suspensão da conversa mas, tanto quanto me apercebi, sem importância de maior.

Alguns meses depois, no mesmo local, decorreu a segunda entrevista. Começou com o esclarecimento de certos aspectos sugeridos por uma primeira análise da entrevista anterior e incidiu sobre as restantes questões previstas no guião. O ambiente e o tom geral em que decorreu foram em tudo muito semelhantes aos da primeira, tendo sido apenas um pouco mais longa.

A escolha da Matemática e da profissão

Manuel Silva é professor no Departamento de Matemática de uma universidade de Lisboa, para onde entrou como professor auxiliar nos finais dos anos setenta e do qual já foi presidente. Tem pois bastantes anos na profissão quer como docente de Matemática, quer como investigador, actividade a que se dedicava em exclusivo no início da sua carreira, e possui trabalhos publicados de mérito reconhecido, tendo com um deles recebido uma distinção.

Explicando como é que chegou à profissão que exerce, Manuel Silva começou por evocar os seus estudos liceais, tendo revelado que o seu primeiro interesse não foi pela Matemática. Durante o Liceu, como contou, graças aos bons professores que teve nesta disciplina, adquiriu gosto e uma boa formação em Matemática mas, nos anos terminais deste nível de ensino, sentia-se mais "inclinado" *(entrev. 1, p. 1)* para a Física e era esta a disciplina que mais o atraía para a continuação dos seus estudos. No entanto, um dos seus professores de Física, pela apreciação negativa que, na altura, fazia da licenciatura neste ramo, aconselhou-o a seguir primeiro um curso de Matemática. Foi o que fez, e a decisão que tomou viria a revelar-se determinante no rumo da sua carreira: "comecei a interessar-me progressivamente por Matemática e fiquei pela Matemática" *(entrev. 1, p. 1-2)*.

Esta opção definitiva não significou, todavia, um desvanecimento da sua primeira inclinação, pois ainda hoje se interessa por assuntos da Física. O seu próprio trabalho de pesquisa tem relações significativas com os problemas e resultados nesta disciplina: "muitos problemas que tenho tentado resolver são motivados por problemas físicos, (...) têm uma interacção, de qualquer maneira, com resultados físicos" *(entrev. 1, p. 2)*. Por esta razão, apesar de não estar no percurso que previra, não se sente "completamente fora" das suas ideias iniciais, tendo acrescentado que se sente bem com o trabalho que realiza, reconhecendo que, eventualmente por formação, tem uma "mentalidade" *(entrev. 1, p. 2)* mais próxima da Matemática do que da Física.

No que se refere à experiência da Matemática como aluno do ensino liceal, Manuel Silva disse ter "boas recordações" *(entrev. 1, p. 10)* associando-as aos bons professores que sempre teve na disciplina. Reconheceu que neste período teve sempre uma boa relação com a Matemática, para o que também terá contribuído um ambiente familiar favorável. Em particular, evocou o seu avô materno, que gostava muito de Matemática e era professor desta discipina e o apoio que ele lhe dava:

> "Eu nas férias ia para casa dele. Era fora de Lisboa, na Guarda, e ele muitas vezes adiantava-me matéria do ano seguinte, discutindo comigo e dando-me umas ideias. Portanto eu tinha um enquadramento positivo, até nas férias, com uma pessoa que gostava de Matemática."
>
> *(entrev. 1, p. 11)*

A sua boa relação com a Matemática manteve-se na passagem para o ensino superior, embora nos primeiros contactos tivesse tido algumas dificuldades de adaptação: "Ao princípio tive um choque", disse, "porque era muito duro" *(entrev. 1, p. 12)*. Referia-se concretamente a uma das cadeiras do 1º ano e ao professor que a regia: "o curso dele era duríssimo, não há dúvida que se aprendeu bastante, mas eu penso que não seria a abordagem mais adequada para o 1º ano e actualmente a situação mudou; o livro dele era muito hermético" *(entrev. 1, p. 12)*. Manuel Silva reconheceu assim diferenças entre a Matemática do seu Liceu e a que veio a encontrar no ensino superior, situando essas diferenças ao nível de uma maior abstracção e de uma maior exigência de trabalho individual, neste último grau de ensino.

A propósito do seu primeiro contacto com a Matemática na Faculdade, Manuel Silva afirmou que a experiência por que passou nos primeiros anos, tê-lo-á levado a uma preferência inicial pelas "coisas mais abstractas, mais herméticas" *(entrev. 1, p. 12)* da Matemática, e só nos anos finais do curso é que a sua propensão para os aspectos mais aplicados desta ciência, se voltou a manifestar. Na área da Análise matemática, as equações diferenciais com derivadas parciais viriam a ser o domínio específico da sua eleição.

No percurso universitário, o seu interesse e gosto pela Matemática foi aumentando e também aqui, note-se, evocou o facto de ter tido bons professores. Nos finais dos anos sessenta, Manuel Silva terminou a sua licenciatura com a decisão de prosseguir na carreira académica, realizando um doutoramento fora do país. Para a escolha da área matemática de trabalho, a Análise, terão tido influência significativa os contactos que teve com um matemático português de renome internacional e que veio mesmo a sugerir-lhe o orientador do seu doutoramento. Este, por sua vez, terá de algum modo levado à determinação da escolha da área específica, as equações diferenciais. Regressado a Portugal, depois de um período como investigador, ingressou na instituição onde ainda hoje exerce a sua profissão.

Convidado a explicar o gosto pela sua área de trabalho, este matemático manifestou interesses relacionados sobretudo com a actividade de investigação:

> "O que é interessante na investigação em geral, e em particular na investigação matemática, é a pessoa pensar que, mesmo que não seja um génio e tenha umas limitações fortes, pode apesar de tudo ter uma contribuição positiva... na ciência. (..) Quer dizer, acho que dá uma grande satisfação interior, a pessoa fazer qualquer coisa. Depende muito das pessoas. Até há pessoas que durante a vida, depois variam e fazem outras coisas, e desistem disso. Mas... Eu francamente sinto-me bem é estar a estudar, e a trabalhar e a pensar no assunto, e a discutir com outras pessoas. É como me sinto bem."
>
> *(entrev. 1, pp. 15-16)*

Este sentimento de poder dar uma contribuição pessoal para o desenvolvimento da ciência, em "poder fazer qualquer coisa que não está resolvida" *(entrev. 1, p. 16)*, voltou a ser invocado logo a seguir quando se pronunciou sobre as suas motivações profissionais que situou igualmente ao nível da actividade de investigação. Com aquela possibilidade e com a satisfação que obtém ao resolver um problema em aberto, vê o seu trabalho como "extremamente compensador" *(entrev. 1, p. 15)*. Em relação à docência, as preferências de Manuel Silva vão para os últimos anos da licenciatura e para os cursos de mestrado: "nunca dei cadeiras do 1° ano, nem gostaria de dar, com franqueza" *(entrev. 2, p. 37)*. Na licenciatura, prefere leccionar o 3° ou o 4° ano pois, ao contrário dos primeiros anos não têm muitos alunos nas turmas. A docência, como fez notar, deixa-lhe menos tempo para a investigação, o que o excesso de reuniões administrativas, que várias vezes criticou, vem agravar. Referindo-se às relações entre o ensino e a investigação, sublinhou a utilidade da dedicação em exclusivo à investigação, durante alguns anos, para o investigador em início de actividade, mas reconheceu também a importância de combinar as duas actividades:

> "Acho que a posição do investigador que só faz investigação em Matemática e que nunca faz cursos, nem que seja a esse nível [referia-se a seminários], acho que é dificilmente defensável, não é?
>
> *(entrev. 2, p. 59)*

A Matemática

Não sendo a disciplina pela qual sentia maior atracção, enquanto estudante do ensino liceal, Manuel Silva, como vimos, já neste nível de ensino sentia gosto e interesse pela Matemática, gosto e interesse que vieram mesmo a aumentar, à medida que os seus estudos progrediam. Quando lhe pedi, logo no início da primeira entrevista, que explicasse a razão desse seu sentimento relativamente à Matemática e do seu investimento nesta disciplina, respondeu assim:

> "Eu acho que a Matemática tem uma coisa que é muito importante, é que permite uma grande... digamos, uma... uma grande... Permite uma abordagem com uma dose de reflexão muito grande e de... contemplação também. Quer dizer, há uma visão... uma parte contemplativa da Matemática que eu acho que é importante. Permite uma certa satisfação interior... mediante a perfeição... e uma certa arquitectura dos resultados obtidos.
> Portanto, [a Matemática]... Eu diria que está muito próxima da Arte e da Filosofia e da Música, enfim dessas coisas. Penso que talvez isso me tenha atraído bastante, porque dá uma certa satisfação ver um edifício relativamente completo e ainda por cima que a pessoa pode dar uma contribuição, nem que seja pequena."
>
> *(entrev. 1, p. 4)*

Foi deste modo que, pela primeira vez, Manuel Silva se referiu à Matemática, mencionando duas componentes no trabalho com esta ciência, a reflexão e a contemplação. Justificou assim a sua atracção pela investigação em Matemática, por um lado, pela percepção que tem de poder participar no desenvolvimento do conhecimento nessa área, na construção do "edifício", para usar as suas palavras, apesar de o reconhecer já "relativamente completo". Por outro lado, por sentimentos de natureza estética — "a perfeição", "a arquitectura" — face aos resultados desse trabalho. Acrescente-se ainda que, quando lhe solicitei uma reacção à frase de um matemático célebre que defendia a beleza na Matemática, contra a 'Matemática feia'[1], Manuel Silva concordou completamente com a ideia defendida, dando mesmo como exemplo da dita 'Matemática feia', aquela

[1] "Os modelos que o matemático cria, como os do pintor e os do poeta, devem ser belos; as ideias, como as cores ou as palavras devem ajustar-se harmoniosamente. A Beleza é o primeiro teste: não há lugar permanente no mundo para a Matemática feia." (Hardy, 1988, p. 2003, anexo 2, episódio 3)

que se faz pela força bruta, com base da "técnica" ou, como também disse, do "martelo-pilão", acrescentando: "quando há umas certas subtilezas, a gente fica mais satisfeito, não é, vê aquilo e diz, ah isto é bonito; até é mesmo o que se diz, isto é bonito" *(entrev. 1, p. 25)*.

Posteriormente, já na segunda entrevista, procurando esclarecer a relação da Matemática com a Arte a que se tinha referido, Manuel Silva mencionou também o "prazer" que a investigação lhe proporciona, quando o trabalho realizado, seguindo critérios adoptados, "está certo" e tem "coerência interna", "é como se fosse uma pintura" *(entrev. 2, p. 12)*. Ainda sobre a relação da Matemática com a Arte, referiu-se ao facto de, na Matemática, intervirem também o que chamou factores de "personalidade" e de "estilo" pessoais *(entrev. 2, p. 12)*. Para além disso, clarificou um pouco o modo como percepciona a beleza neste ramo do conhecimento, associando-lhe as ideias de harmonia e coesão, como se pode depreender das suas palavras:

> "Acho que [os aspectos estéticos entram] um bocado no... digamos... no equilíbrio das coisas que se fazem. [No facto] de terem uma certa... uma certa unidade... Enfim, apesar de tudo, apesar de poderem ser coisas inacabadas (...), terem uma certa... uma certa orgânica, não é? Com uma certa... com uma certa beleza que lhe vem de ser uma coisa que se lê e que se vê que está... que resolve um problema que se tinha posto, ou que resolve parcialmente, não é?"
>
> *(entrev. 2, p. 13)*

Sobre a questão de existirem uma ou várias matemáticas, Manuel Silva foi claro e peremptório — "não, acho que há só uma" *(entrev. 1, p. 44)* — reafirmando esta posição quer no que respeita à distinção clássica entre Matemática pura e Matemática aplicada, quer no que se refere à Matemática intuicionista. "Não há Matemática aplicada, nem pura", disse, "há Matemática" *(entrev. 1, p. 45)*, e, mencionando as posições intuicionistas, considerou que se trata apenas de uma restrição no trabalho matemático, sendo a Matemática a mesma:

> "[Na Matemática intuicionista] é como estar a jogar ao xadrez, tirar uma peça fora [e] dizer que aquela peça não mexe. Pode[mos] ter mais dificuldade em demonstrar as coisas, ou impossibilidade mesmo, mas é tudo."
>
> *(entrev. 1, p. 44)*

A Matemática e a realidade. Confrontado com a questão das relações da Matemática com a realidade, ao nível do processo de desenvolvimento do conhecimento, Manuel Silva, defendeu que a Matemática "apareceu como uma ciência para resolver certos problemas [reais] que havia na Antiguidade" *(entrev. 1, p. 38)*, só mais tarde se estabelecendo como campo científico autónomo, e que a relação com a realidade é feita, justamente, através desses problemas. Hoje em dia, no seu entender, esta interacção mantém-se, embora tenha considerado que o conhecimento matemático também se desenvolve aparentemente sem qualquer relação com o mundo não matemático, obedecendo a leis internas. "Há sempre", disse, "também aquele desenvolvimento da Matemática que se faz um bocado endogena[mente]" *(entrev. 1, p. 38)* o que, como igualmente sublinhou, não significa que desse desenvolvimento não venham a surgir aplicações que não eram visadas e das quais nem sequer se suspeitava.

Do seu ponto de vista, portanto, podemos dizer que a realidade inspira a Matemática. O próprio trabalho de pesquisa que Manuel Silva desenvolve é, como foi referido, motivado por problemas da Física: "neste momento", disse quando explicava como lhe surgem certos assuntos que investiga, "estou a estudar um problema, que já é mais matemático, mas que foi desencadeado por um problema que, por sua vez, tinha sido motivado por um problema físico" *(entrev. 1, p. 19)*. Todavia, Manuel Silva fez notar que a Matemática tem também um desenvolvimento autónomo, gerando conhecimentos independentemente da sua eventual aplicação e, para explicar a sua ideia, cita o físico Dirac, dizendo:

> "[Dirac] achava bem que a Matemática, a partir de uma certa ideia física, se desenvolvesse ela própria como ideia matemática, porque até podia ser que, passados uns tempos, aquelas ideias matemáticas desenvolvidas tivessem outra vez uma aplicação à Física, por exemplo, um regresso à origem. É curioso, eu acho que é verdade... Eu acho que isso é o que se passa. É difícil de estar a dizer que uma coisa tem ou não ligação imediata [com a realidade]."
>
> *(entrev. 1, p. 38)*

Da realidade à Matemática, da Matemática à realidade, numa espécie de "regresso à origem" *(entrev. 1, p. 38)*, como foi chamado, mesmo se depois de um período de desenvolvimento, fora e independente de qualquer relação com o mundo exterior. Manuel Silva prosseguiu acrescentando ainda que há problemas que se resolvem em Matemática, directamente motivados por questões de outras áreas, mas, como fez questão de sublinhar, esta "não é a única interacção com a realidade"*(entrev. 1, p. 38)*.

Para esclarecer o sentido desta sua frase, a questão das relações da Matemática com a realidade foi retomada logo no início da segunda entrevista, e Manuel Silva referiu-se então a um outro tipo de interacção. Para além de poder desencadear um determinado desenvolvimento matemático que vem explicar um fenómeno ou resolver um problema, a realidade, em sua opinião, pode ter uma interacção com a Matemática que qualificou de "inesperada" *(entrev. 2, p. 5)*, influenciando formas de pensar ou de raciocínio no decurso de um trabalho matemático desenvolvido sem qualquer objectivo de aplicação. Deste tipo de interacção, deu o seguinte exemplo, que lhe foi relatado por um matemático italiano, conhecido de um amigo seu:

> "Aqui há bastantes anos, quando utilizou pela primeira vez um método para resolver um certo número de problemas, chamado Método de Truncatura (...), ele disse que tinha sido inspirado por uma coisa real muito simples. Ele fazia esqui, aliás muito mal porque ele era muito desastrado (risos) e... (...). Estava numa montanha lá em Itália e começou a comparar as montanhas mais altas com os *coles* (...) uma espécie de montanhas desgastadas não é, que têm... [que] estão truncadas. Como estava a pensar num problema, ele diz que foi aquilo que lhe sugeriu a aplicação do método."
>
> *(entrev. 2, p. 2)*

Manuel Silva, considera assim que a inspiração desencadeada pela realidade pode muitas vezes ser "estranha" e, no seu entender, este tipo de influência no trabalho matemático criativo, é algo "completamente corrente" *(entrev. 3, p. 3)*. Por esta razão, concordou que a Matemática traz marcas da realidade ainda que, como disse, isso seja difícil de perceber em certos domínios onde a abstracção é muito grande.

Na mesma linha de pensamento, admitiu que não há arbitrariedade nos axiomas matemáticos, embora fizesse sentir que, com o desenvolvimento da teoria, isso, em alguma medida, pode acontecer: "é claro que depois numa segunda fase pode haver uma certa arbitrariedade, (...) em particular porque as estruturas podem-se tornar interessantes do ponto de vista dos desenvolvimentos matemáticos, independentemente, digamos, de uma motivação mais... mais concreta; mas eu acho que, no início, bom, como na Geometria, não é, aqueles postulados e essas coisas são coisas naturais" *(entrev. 2, p. 2)*.

Para explicar a aplicabilidade da Matemática, para além da situação em que esta ciência responde, por assim dizer, a uma solicitação directa de outras áreas de actividade humana ou campos disciplinares, Manuel Silva sugeriu duas possibilidades. A hipótese de determinadas teorias matemáticas serem utilizadas pelo simples facto de existirem em determinada altura — "porque são as que estão disponíveis" — hipótese que explicou dando um exemplo: "a Física, ao nível da Relatividade, que foi a que se inspirou em parte na Geometria Tensorial, etc., penso que ela pôde desenvolver-se, não é, porque [era] aquilo estava disponível". *(entrev. 2, p. 7)*. E, por outro lado, mencionou também a eventual existência de uma espécie de influência subliminar que o desenvolvimento numa área científica pode provocar noutra área científica:

> "A gente pode pensar se haverá alguma interacção do estilo: porque a Física já estava madura para aparecerem um certo número de conceitos, será que isso teve a ver com o desenvolvimento da Matemática naquela direcção, para aparecerem aqueles novos conceitos na Matemática que permitiram depois avançar na Física? Isso é um bocado difícil de chegar à conclusão, mas não me admira que isso, subconscientemente, tenha acontecido."
>
> *(entrev. 2, p. 7)*

Ainda em relação às aplicações da Matemática, Manuel Silva considerou que, a ser possível uma popularização ou uma maior divulgação da Matemática, ela, na grande maioria das situações, só poderá ser feita indirectamente, recorrendo, precisamente a essas aplicações. De outro modo, no seu entender, pelo seu tipo de linguagem e pelo elevado grau de interligação dos seus vários tópicos e ramos, pelo "*background*" *(entrev. 1, p. 9)* que exige, a Matemática é muito difícil de explicar às pessoas em geral. No entanto, considerou importante a referida popularização, não só porque pode constituir um factor de motivação dos jovens, levando-os a interessarem-se por esta disciplina, como serve para divulgar a ideia de que a Matemática "resolve problemas importantes na vida corrente" *(entrev. 1, p. 9)*.

Rigor e verdade matemáticos. Perante os teoremas ou conceitos matemáticos, Manuel Silva manifestou a ideia de que a sua formulação corresponde a uma situação de descoberta. "Acho que é uma descoberta, não é propriamente uma invenção" *(entrev. 1, p. 40)*, disse, tendo em mente o seu próprio trabalho de investigação. No seu entender, se foi possível demonstrar um teorema, ele é verdadeiro e "portanto existia" antes da sua demonstração; o seu papel foi "apenas" encontrar a forma de provar a sua veracidade *(entrev. 1, p. 40)*. Referindo-se às verdades matemáticas em geral, relativizou no entanto esse estatuto de verdade ao contexto em que são demonstradas:

> "As coisas têm um certo contexto em que são provadas, não é, e pronto, naquele contexto são verdadeiras ou falsas. Mas o contexto pode não ser o mais adequado ao problema. (...) Pode ser que amanhã haja outros matemáticos que encontrem um quadro ainda mais razoável e natural para tratar o problema, e que fique completamente escrito e aí talvez haja uma coisa mais definitiva. Mas é difícil dizer que é uma coisa definitiva."
>
> *(entrev. 1, pp. 41-42)*

Fez notar todavia que a situação é diferente nos casos em que o problema está bem definido. Nestes casos, determinado resultado "ou se demonstra ou não se demonstra", podendo então dizer-se que nestas situações a verdade demonstrada é perene:

> "Eu penso que há casos onde se pode dizer, digamos, que é um resultado definitivo, há outros casos em que não. Talvez seja melhor precisar assim. Não é dizer que não há nada de definitivo. É dizer que há certos casos que talvez possam ser definitivos e, noutros casos, é uma coisa que tem um certo quadro onde aparece e o quadro pode ser melhorado, não é, e portanto ser um resultado mais interessante."
>
> *(entrev. 1, p. 43)*

Em sua opinião, aquela alternativa não depende do nível de rigor utilizado, mas do estado de desenvolvimento do conhecimento, do referido "enquadramento" ou das "técnicas" matemáticas disponíveis. A propósito do rigor matemático, Manuel Silva concordou com a frase de Henri Poincaré quando este matemático diz que 'o rigor absoluto foi atingido'[1]. "Mais do que isso não é

[1] Poincaré (1988, p. 11).

possível", disse, a linguagem em Matemática está "estabelecida" e neste aspecto "não há alterações nem surpresas" *(entrev. 1, p. 43)*.

A possibilidade de se poder demonstrar a verdade ou falsidade de uma proposição, pelo menos no quadro de um determinado contexto matemático, com um rigor consensual nessa demonstração, parece constituir um elemento significativo na visão que Manuel Silva tem desta ciência. Por exemplo, quando foi convidado a explicar o que, em seu entender, caracteriza uma actividade como matemática, invocou imediatamente "a demonstração", "o rigor", "o método demonstrativo" *(entrev. 1, p. 46)*. Para além disto, questionado para distinguir a Matemática das outras ciências, Manuel Silva apresentou-a como uma ciência eminentemente dedutiva, com um estatuto de ciência exacta, rigorosa e objectiva e na qual não há lugar para a ambiguidade:

> "Bom, essencialmente eu penso que é essa questão de... De partir de um certo número de axiomas, enfim, base do modelo em que se está a trabalhar, do modelo geral da Matemática. E depois, a partir daí, tudo o que se escreve tem que estar em condições, digamos, em condições de poder ser provado, não é, de acordo com esses axiomas de partida. Portanto, não há... a... É aquilo [a] que se chama uma ciência exacta, mas exacta completamente exacta. Isto é, não há especulação no sentido... Como há na Física ou na Química, onde apesar de tudo há interpretações, não é. Na Física experimental e na Química, quer dizer, há interpretações dos fenómenos que são um bocado subjectivas, por vezes. Aqui [na Matemática] não há qualquer espécie de subjectividade. A pessoa tem... tem aquilo, não é, e qualquer pessoa que leia aquilo, quer dizer, tira as mesmas conclusões, não há hipóteses... Ou está errado, ou está certo, não é."
>
> *(entrev. 2, p. 14)*

A actividade matemática

Ao longo das duas entrevistas, por inúmeras vezes e em contextos muito diversificados, Manuel Silva fez referência aos problemas na Matemática. Por exemplo, quando aludiu ao trabalho de pesquisa em Matemática e, em particular, ao seu próprio trabalho, e mencionou as suas relações com a Física: "muitos problemas que tenho tentado resolver são motivados por problemas físicos" *(entrev. 1, p. 2)*. Também, ao sugerir formas para promover uma divulgação alargada da Matemática, se referiu a "problemas interessantes" nesta ciência, bem como nas suas aplicações a outras áreas científicas, e justificou a importância desta divulgação, dizendo que ela permite fazer sentir às pessoas "que a Matemática é uma coisa importante que em particular resolve problemas, pode resolver problemas importantes na vida corrente" *(entrev. 1, p. 9)*.

São ainda os problemas, e o "desafio" que eles colocam, que no entender de Manuel Silva estimulam e gratificam o trabalho de investigação, ainda que, como o matemático fez notar, a sua eventual resolução possa conduzir a uma situação de ambivalência emocional:

> "[É o] interesse por fazer qualquer coisa que ainda não está resolvida. Portanto, um certo desafio... que os problemas põem e que dão uma certa satisfação quando a pessoa [os] resolve. Por vezes até, a pessoa fica triste, há uma certa contradição. Quer dizer, a pessoa resolve o problema e fica satisfeito por um lado, mas, por outro lado, [fica] triste porque já não tem aquele desafio. Tem que passar a outro imediatamente, para sentir outra vez...
> Há uma certa, digamos, ansiedade, da pessoa que se dedica à investigação, na medida em que tem os problemas para resolver, mas depois tem que arranjar problemas interessantes para continuar."
>
> *(entrev. 1, p. 16)*

Quando se pronunciou sobre os aspectos estéticos da Matemática, Manuel Silva, também aludiu aos problemas, dando a ideia que a beleza da Matemática lhe advém do facto de resolver problemas. Na altura, recordo, referiu a tendência dos matemáticos dizerem, perante a solução de um problema, "isto é uma coisa bonita" *(entrev. 1, p. 26)*, tendo também afirmado que vê num resultado matemático "uma certa beleza que lhe vem de ser uma coisa (...) que resolve um problema que se tinha posto, ou que resolve parcialmente" *(entrev. 2, p. 13)*. Recordo também que, para Manuel Silva, a Matemática é uma ciência que nasceu para resolver problemas que a actividade humana colocava e que a ligação da Matemática com a realidade se estabelece, precisamente, através desses problemas e da tentativa da sua resolução. Por fim, cabe aqui ainda referir que Manuel Silva, quando lhe pedi para caracterizar um bom matemático, na resposta que deu começou assim:

> "Bom isso é... Um bom matemático, quer dizer, eu penso que é [um] a pessoa que, para já... tem que ter uma preparação bastante sólida,

não é. Depois, com essa preparação, consegue resolver problemas considerados interessantes pela comunidade matemática. Isso é um bom matemático."

(entrev. 2, p. 26)

Intuição e lógica, demonstração. Ainda a propósito dos problemas e da sua resolução, apresentei a Manuel Silva uma frase de um matemático conhecido, em que se dizia que o 'coração' da Matemática são os problemas e 'aquilo de que verdadeiramente a Matemática consiste é de problemas e da sua resolução'[1]. A este propósito, passou-se o seguinte diálogo:

M.S. — Eu penso que sim, isto é um bocado verdade. 'É apesar de tudo sustentável um ponto de vista para o qual nenhum desses ingredientes está no coração da Matemática' [a ler a frase]. O que é fundamental é atacar os problemas e resolvê-los. Penso que sim. Eu perfilhava esta coisa. De quem é isto, a propósito?

Inv. — É de Paul Halmos. Penso que o texto se chama mesmo 'O coração da Matemática'[2]. Ele situa nesse coração, os problemas.

M.S. — Eu também optaria por essa ... Aliás há bocado falei nisso.

Inv. — Sim, sim, desde o princípio tem falado [nos problemas]. Por isso mesmo é que nesta parte final, quando começou a pôr a tónica na demonstração, claro que a demonstração é um problema, ou pode ser um problema...

M.S. — É mais um problema no sentido... é um problema para a pessoa que o está a demonstrar (risos), até encontrar a demonstração. Já tenho ouvido dizer, este resultado é de certeza verdadeiro, ainda não consegui foi arranjar uma demonstração.

(entrev. 1, pp. 48-49)

A certa altura da primeira entrevista, questionado sobre o lugar dos momentos criativos no conjunto da sua actividade como matemático, Manuel Silva respondeu que os considerava de pequena duração e pouco numerosos:

"Eu acho que são muito curtos (...). As pessoas quando encontram um resultado interessante para elas, não quer dizer que seja muito im-

[1] Halmos (1980, p. 519); anexo 2, episódio 6.

[2] (Halmos, 1980).

portante (...) mas de que andavam à procura, é [um momento] extremamente limitado no tempo. No tempo e em número. Há uma ideia, e depois a partir dessa ideia fazem várias coisas. Há uma ideia chave, e é uma coisa extremamente limitada no tempo."

(entrev. 1, p. 34)

Explicou que, em contrapartida, o trabalho não criativo, "não muito compensador" e menos interessante — "essa parte aí é mais chata" —, pode estender-se por muito tempo *(entrev. 1, p. 34)*. Aludia concretamente à parte de redacção dos trabalhos onde muitas vezes, segundo disse, surgem dificuldades técnicas e se encontram erros de raciocínio, nem sempre fáceis de ultrapassar. Chamou no entanto a atenção de que se trata de uma fase muito importante cuja importância justificou do seguinte modo, evocando o seu próprio trabalho:

"É preciso um esforço muito grande porque a pessoa tinha que ter muito cuidado no que estava a escrever, porque podia estar a escrever uma aldrabice, e a coisa tinha que ser vista com muito cuidado... Se não depois o resultado ficava falso, tinha a demonstração errada, pelo menos com aquela demonstração não era verdadeiro. E, como de certeza era verdadeiro, porque já tinha percebido que aquilo era assim, era preciso pôr a coisa de uma forma [completa] (...).
Embora a pessoa esteja mesmo a ver que aquilo é verdade, a demonstração pode não estar ainda completa do ponto de vista matemático. Ela está feita na cabeça, mas não está passada à linguagem analítica. E a pessoa pode ter [aqui] dificuldades muito grandes mesmo."

(entrev. 1, p. 35)

Desta declaração, e também da sua última intervenção no diálogo sobre o lugar e a importância dos problemas na Matemática, transcrito imediatamente antes, podemos entrever alguns aspectos da actividade e do processo de criação em Matemática do ponto de vista de Manuel Silva, neste caso, no que se refere ao papel da intuição e da demonstração.

"Já tenho ouvido dizer", afirma o matemático, "este resultado é de certeza verdadeiro, ainda não consegui foi arranjar uma demonstração", e, "embora a pessoa esteja mesmo a ver que aquilo é verdade, a demonstração pode não estar ainda completa". Ou seja, a verdade de um resultado parece ser, para Manuel Silva, independente da sua demonstração, e a convicção dessa verdade, por parte do matemático que encontra o resultado, é mesmo vista como sendo prévia à realização da demonstração (e podendo motivar o esforço na sua procura). O estado descrito — o estar "mesmo a ver" a verdade de um resultado, o ter a "certeza" sobre essa verdade, mesmo perante a inexistência da sua demonstração — sugere a ideia de intuição como antevisão, como capacidade de prever ou antecipar um resultado matemático.

Solicitado a pronunciar-se sobre o papel da intuição no trabalho criativo em Matemática, Manuel Silva, reconhecendo não conseguir caracterizar suficientemente esta noção — "não sei bem o que é a intuição" *(entrev. 1, p. 36)* — associa-a a uma "percepção" ou, como também disse, a uma "sensibilidade para aquilo que é natural que venha a acontecer" *(entrev. 1, p. 36)*, expressões que também correspondem à ideia de intuição como capacidade de previsão ou antecipação já mencionada. Como explicou, nos momentos criativos, as ideias ocorrem subitamente, umas vezes em situações matematicamente descontextualizadas, quando se está a fazer qualquer outra coisa não relacionada com a questão que se pretende resolver. Outras vezes as ideias surgem enquanto decorre o trabalho matemático, nuns casos isoladamente, noutros numa sucessão encadeada. Manuel Silva referiu-se a este processo do seguinte modo:

> "[A pessoa] está a pensar naquilo, mesmo que não esteja a pensar objectivamente (...) e, por vezes, lembra-se de qualquer coisa que permite pôr o problema mais a jeito de o poder resolver. Pode não ser logo... uma solução total... (...) Às vezes não, é só uma coisa pontual. Pode ser assim uma ideia e, depois, vir logo uma série de ideias logo a seguir. E pode ser uma ideia isolada e daí a um mês a pessoa tem outra [qu]e 'cola' nessa. Há os dois tipos de coisas."
>
> *(entrev. 1, p. 37)*

Quando lhe pedi que fornecesse alguns elementos que pudessem caracterizar uma actividade como matemática, Manuel Silva referiu-se, como já foi mencionado, ao "método demonstrativo", considerando-o "o método da Matemática", e, de algum modo, identificou Matemática com demonstração. "Como dizia Bourbaki", alega Manuel Silva, "quem diz Matemática, diz demonstração", acrescentando ainda, "[fazer Matemática] é demonstrar os resultados que [se] põe[m], dentro do contexto em que se estão a pôr, com as limitações dos axiomas" *(entrev. 1, p. 46)*.

Para este matemático, pela demonstração comunicamos a certeza sobre a verdade de um resultado. "A técnica é sempre a mesma", disse, "é demonstrativa, o resultado só é [aceite como] verdadeiro, depois de demonstrado" *(entrev. 1, p. 46)*, sendo que esta demonstração se terá que revestir de carácter analítico. "Os matemáticos só o aceitam como verdadeiro, depois de ter uma demonstração analítica" *(entrev. 1, p. 46)*, acrescentou, e deu como exemplo as reservas que têm sido levantadas a demonstrações feitas por computador ou que incluem argumentos não analíticos.

A este propósito, referiu na altura o caso de um autor português sobre a conjectura de Poincaré, contando que a demonstração apresentada envolvia "muito a intuição", "bonecos" *(entrev. 1, p. 47)*, e quando se procedeu à sua tradução analítica, foi descoberto um erro. Considerou, no entanto, que as demonstrações analíticas também podem conter erros e que na investigação matemática, de um modo geral, nem todos os passos são explicitamente demonstrados, sendo corrente o recurso a resultados previamente dados como provados, em cuja veracidade se confia:

> "Uma pessoa está a fazer investigação e por vezes serve-se de resultados [de] que não foi ver a demonstração, se não estava tramado. Supõe, admite que. Bom, se há trinta pessoas ou quarenta que já viram aquilo com certo cuidado, com certeza que não há nenhum erro fundamental. Senão era impossível continuar. É evidente que há sempre um grau de confiança que a pessoa tem que depositar naquilo que já existe feito, escrito."
>
> *(entrev. 1, p. 48)*

O papel da experiência, o papel do computador. Manuel Silva apresentou como consensual entre os matemáticos, a exigência do carácter analítico da demonstração de um resultado para que este seja aceite como verdadeiro o que, como vimos, explicava as objecções da comunidade matemática, face a provas computacionais. Foi também já referido que este matemático distingue a Matemática das ciências experimentais, pela objectividade e exactidão que, no seu entender, o carácter dedutivo que possui lhe confere. A principal diferença que apontou entre o trabalho dos matemáticos e o dos outros cientistas, situou-a ao nível do papel que a experiência desempenha nesse trabalho. A Física e a Química experimentais serviram como exemplo:

> "Bom, nos teóricos, tipo Física teórica, não sei se há uma grande diferença [em relação aos matemáticos], não é. Nos físicos experimentais

> e nos químicos, acho que sim, porque o suporte da experiência é fundamental... O desenvolvimento da experiência é fundamental para irem formulando ideias. Portanto, estão extremamente dependentes do que está a decorrer no laboratório."
>
> *(entrev. 2, p. 18)*

Convidado a explicar qual tem sido o papel das novas tecnologias, e em particular do computador, na Matemática, Manuel Silva, reconheceu que a sua utilização corresponde à "introdução da experiência" *(entrev. 2, p. 23)* nesta ciência. Aludindo a determinados momentos da sua própria pesquisa, onde recorreu ao computador, disse: "fez-se uma experimentação" *(entrev. 2, p. 18)*. Teve porém o cuidado de sublinhar que o trabalho efectuado não consistia numa demonstração. "Isto não é uma demonstração", disse, referindo-se à experiência que, brevemente, descreveu assim:

> "A função (...) tinha pelo menos que ser contínua, portanto, se [n]o boneco não desse contínua, acabou, não é. Por outro lado, tinha que ser nula no infinito, de um lado e doutro. Portanto, se de um lado crescesse, também acabou. (...) Fez-se [então] uma experimentação, com vários dados iniciais. Aí era preciso ter sorte, não é, porque... (...) pessoa vê, faz várias experiências (risos) e tenta ver. Bom, para já, logo num dos casos deu a impossibilidade portanto, dava mesmo uma função com uma grande singularidade, e portanto nunca podia ser contínua. Por outro lado, [n]o outro caso (...) [a função] crescia num dos lados do eixo portanto, também, por outra razão, não funcionava. Portanto, a conjectura que a gente fez não deve ser verdadeira."
>
> *(entrev. 2, pp. 19-20)*

Importa dizer aqui que, a propósito de eventuais diferenças na forma de trabalhar entre os matemáticos, Manuel Silva considerou que raramente utiliza o computador e, quando o fez, foi por intermédio de outra pessoa com quem trabalha em colaboração. No entanto, evocando esse trabalho, Manuel Silva deu vários exemplos das vantagens e potencialidades que o computador traz para a investigação, para lá da simples utilização como calculador rápido e potente. Mencionou, em particular, as possibilidades de visualização gráfica que introduz, bem como as suas potencialidades heurísticas que exemplificou recorrendo de novo ao seu trabalho:

> "Depois viemos [a] tentar obter analiticamente [o resultado] porque, por acaso, aquilo simplificava-se muito. O computador deu-nos uma

> ideia para simplificar o problema... O que acontece é que aquilo era um sistema de quatro [equações] e, [n]o computador... no exemplo com aqueles dados, via-se que anulava[m] duas equações. Portanto, havia ali uma simplificação e fui ver o que é que era, não é. E portanto, cheguei às mesmas conclusões, do ponto de vista analítico."
>
> *(entrev. 2, p. 22)*

Exemplos como este, tê-lo-ão levado a uma percepção da contribuição do computador na investigação matemática que pode ser sintetizada na seguinte afirmação: "poupa tempo e dá ideias, disso não tenho dúvidas" *(entrev. 2, p. 22).*

O trabalho dos matemáticos. Logo no início da primeira entrevista, quando falava na sua relação com a Matemática, Manuel Silva manifestou a opinião de que há diferenças significativas entre as pessoas que trabalham em Matemática, "até mesmo entre os matemáticos, grandes matemáticos" *(entrev. 1, p. 5).* Como exemplos, referiu diferenças ao nível da capacidade em progredir no estudo e ultrapassar dificuldades, bem como ao nível da capacidade de relacionar os assuntos. "A pessoa às vezes fica um bocado frustrada", disse, "vê pessoas que têm um grau de rapidez e de englobamento de assuntos muito mais profundo" *(entrev. 1, p. 5).* No entanto, considerou que "há sempre Matemática ao alcance da pessoa" e "Matemática interessante" *(entrev. 1, p. 5)*:

> "Como dizia também um colega meu (...) há sempre Matemática que a pessoa pode abordar e fazer uma coisa interessante, desde que esteja enquadrado, porque o enquadramento é fundamental, e possa discutir com outras pessoas. Possa inclusivamente deslocar-se ao estrangeiro com grande frequência para poder contactar com outras pessoas, e... [consultar] bibliotecas convenientes. Pode[-se] sempre fazer uma Matemática interessante."
>
> *(entrev. 1, p. 5)*

Sobressai nesta declaração de Manuel Silva uma grande importância atribuída ao que chamou "enquadramento", assim como à interacção entre os matemáticos, para o progresso do trabalho que realizam. Recordo que Manuel Silva explicou a escolha da área a que se dedica, invocando a influência de um matemático português com quem colaborou no final do seu curso universitário, bem como a do seu orientador de doutoramento.

O papel da comunidade matemática e a valorização da interacção entre os matemáticos no desenvolvimento da ciência em que trabalham sobressaiu em várias intervenções de Manuel Silva ao longo das entrevistas. Por exemplo, para explicar o que o leva a escolher os problemas com que lida, mencionou fontes de duas naturezas. Por um lado, fontes externas à Matemática, ocupando a Física, no seu caso, lugar privilegiado. Por outro lado, fontes na própria Matemática, que proporcionam motivações e desenvolvimentos internos, sem que se tenha em mente qualquer tipo de relação com outras áreas científicas ou domínios de actividade. Nesta situação, como exemplificou, a motivação para o trabalho pode ser desencadeada "por outro matemático que põe um problema interessante" *(entrev. 1, p. 19)*.

"Discutir com outras pessoas" *(entrev. 1, p. 22)*, foi algo que Manuel Silva considerou importante para se poder apreciar o valor de um resultado a que se chegou, assim como a realização de seminários com especialistas na área ou o envio de trabalhos para publicação em revistas de investigação matemática. Confrontado com a questão de como subsiste a 'Matemática boa' entre a enorme produção que existe neste domínio científico, a resposta de Manuel Silva evidencia o papel da comunidade e da interacção referidos:

> "Eu penso que essa Matemática vem ao de cima um bocado por... por conhecimento, digamos, do que é a comunidade matemática mais viva, e [pel]os encontros que as pessoas têm. As pessoas encontram-se num seminário, ou num sítio dinâmico, onde há um certo encontro periódico das pessoas. Ou então em conferências internacionais, onde se encontram um certo número de indivíduos para discutir. Mais do que às vezes as próprias exposições, são as conversas entre as pessoas que valem. E vê-se um bocado o que se está a passar."
>
> *(entrev. 1, p. 25)*

Sobre o papel da comunidade matemática e da interacção entre os matemáticos, cabe aqui ainda referir que Manuel Silva, entre as qualidades que enunciou para um bom matemático, mencionou a capacidade em resolver problemas que a comunidade matemática reconhece como interessantes. E, quando se pronunciava sobre os conselhos que daria a um aluno interessado em seguir a carreira de matemático, evocou as experiências "extremamente positivas" por que passou quando esteve "integrado em grupos extremamente dinamizadores", sendo também significativa, a este respeito, a sua ideia de que "o ver pessoas entusiasmadas é importante" *(entrev. 2, p. 32)*.

Sobre as qualidades de um bom matemático, além da preparação científica e da capacidade de resolver problemas já mencionadas, a "forte imaginação" e a "grande capacidade de concentração" *(entrev. 2, p. 27)*, foram também incluídas entre as mais importantes. Não referiu de moto próprio a memória, mas concordou que "a memória ajuda" e é igualmente "muito importante" *(entrev. 2, p. 27)*. Algumas destas qualidades foram também indicadas quando explicou como se apercebe se um seu aluno poderá vir a ser um bom matemático:

> "A pessoa vê um bocado a forma como ele resolve os problemas nos exames, não é... Bom, acho que a imaginação se reflecte [aí], que já aparece nessa altura, [n]a maneira como o problema é resolvido (...). Outra das coisas, claro que é, não só a questão das provas escritas enfim, porque aí até pode haver limitações da própria pessoa, nervos ou isso... mas, [os] trabalhos que se dão para fazer e o nível de aperfeiçoamento e de imaginação postos nesses trabalhos, não é. (...) A contribuição pessoal nesse tipo de trabalhos poderá, de facto, reflectir já a tendência para fazer investigação em Matemática, embora possa não ser propriamente um trabalho de investigação."
>
> *(entrev. 2, p. 29)*

Destacam-se aqui, também, qualidades como o bom desempenho ao nível da resolução de problemas, a imaginação, e a contribuição pessoal do aluno, com algum grau de originalidade, como reconheceu, sem que isso signifique "fazer resultados novos" *(entrev. 2, p. 29)*. A estes indicadores, podemos chamar-lhes assim, acrescentou ainda a rapidez na resolução de questões que apresentem alguma dificuldade.

Relativamente ao modo como realizam o seu trabalho, Manuel Silva não identificou diferenças significativas entre os matemáticos. Considerou, por exemplo, que nas áreas aplicadas é muito frequente a utilização do computador, e que isso também é feito em áreas mais teóricas, o que no seu caso, como foi já mencionado, poucas vezes acontece. Reafirmou a importância da concentração — "o período de pensar é fundamental" *(entrev. 1, p. 28)* — pelo menos em certas fases do trabalho, embora isso possa ser conseguido diferentemente entre os matemáticos, uns precisando de grande isolamento, outros nem tanto.

Ainda sobre eventuais diferenças entre os matemáticos, Manuel Silva referiu a existência cada vez mais frequente de trabalhos de colaboração, por vezes juntando várias pessoas e envolvendo graus de participação umas vezes semelhantes, outras vezes diferentes. Nestes trabalhos, como explicou, a natureza da colaboração pode variar desde uma simples divisão de tarefas por níveis de especialidade, conseguindo-se uma divisão clara do trabalho a realizar, até um tipo de trabalho "de tal maneira interactivo que não se sabe quem fez o quê" *(entrev. 1, p. 30)*. Considerou esta forma de colaboração como um trabalho de equipa frequente em Matemática nos dias de hoje, embora envolvendo um pequeno número de elementos. Por esta razão, confrontado com a ideia de um matemático célebre, segundo a qual 'para fazer investigação matemática são apenas necessários uma folha de papel e uma boa biblioteca' e o trabalho em equipa 'é bastante raro em Matemática, tendo a maior parte dos matemáticos dificuldade em reflectir seriamente salvo no silêncio e na solidão'[1], recusou-a como "ultrapassada" e "limitada" *(entrev. 1, p. 31)*.

"Há a reflexão no silêncio e na solidão", disse Manuel Silva, "mas há a reflexão na discussão que é extremamente importante", acrescentando ainda que não é verdade que nos dias de hoje para realizar investigação matemática apenas seja preciso papel, lápis e uma biblioteca, pois, em sua opinião, "a colaboração e a discussão entre as pessoas é mesmo essencial" *(entrev. 1, p. 32)*. Em seu entender, talvez seja mesmo esta a grande diferença no trabalho actual dos matemáticos em relação ao dos matemáticos de outrora já que, ao nível do trabalho individual, pensa que "é exactamente o mesmo" *(entrev. 1, p. 32)*.

O ensino da Matemática

"Sempre tive bons professores de Matemática" *(entrev. 1, p. 1)* é uma das frases iniciais de Manuel Silva, no começo da primeira entrevista. Referia-se ao seu ensino liceal, associando esses bons professores à qualidade da sua formação em Matemática e ao gosto que adquiriu pela disciplina. Por esta razão, como vimos, são boas as memórias que tem da sua experiência matemática neste nível de ensino. Com referências breves, lembrou o seu professor do 1° ano —

[1] Dieudonné (1990a, p. 24), anexo 2, episódio 1.

"muito interessante" — e o do 2º, que era "mais didáctico" *(entrev. 1, p. 10)* mas adequado ao nível deste ano. Mais demoradamente, falou de um professor que teve do 3º até ao 7º ano, reservado e pouco falador, como disse, cujas aulas descreveu do seguinte modo:

> "Era bastante vivo na maneira de fazer o dia a dia do curso. O curso era sempre feito com um indivíduo no quadro. Um aluno que ele chamava mais ou menos arbitrariamente. Ao mesmo tempo que lhe estava a perguntar coisas da aula anterior, estava a formular a própria aula. Era delicado fazer aquilo. (...) Na segunda parte da aula, chamava outro aluno, sobre a parte anterior, para fazer uma espécie de chamada. Mas a primeira parte, a principal parte da aula, era feita construtivamente."
>
> *(entrev. 1, p. 10)*

Também no ensino superior, este matemático fez referência aos bons professores que teve — "grande nível" *(entrev. 1, p. 10)* — que considerou terem contribuído significativamente e de diversas maneiras para a sua formação, tendo mesmo reconhecido a influência que tiveram na evolução do seu percurso escolar e académico.

Falando da importância da divulgação e da popularização da Matemática, Manuel Silva, a certa altura, referindo-se à necessidade que existe em motivar os jovens para esta disciplina valoriza assim o papel do professor:

> "Eu penso que aquela componente essencial que é o professor é determinante. O professor e o método de ensino digamos assim, e aproveitando todas as coisas que há neste momento ao nosso dispor, audiovisuais, etc. Acho que se deve aproveitar tudo. Mas o professor, a componente professor, é a principal, é a fundamental."
>
> *(entrev. 1, p. 9)*

Prosseguiu referindo-se à formação dos professores e às consequências negativas que decorrem pelo facto de existirem docentes com formação deficiente: "entregam cadeiras de Matemática a pessoas com uma formação diminuta, é uma grande responsabilidade; pode marcar para toda a vida as pessoas, rebentar com as vocações, [levar] pessoas com grandes capacidades [a] ficar[em] frustradas e desinteressar[em]-se" *(entrev. 1, p. 9)*.

Ensino superior. Manuel Silva vê-se essencialmente como um investigador. Como se sente bem, recordo, é "a estudar, e a trabalhar e a pensar (...), e a discutir com outras pessoas" *(entrev. 1, p. 15-16)*. Entre as suas motivações e contrapartidas profissionais, os aspectos que mais destacou estão relacionados com a investigação: a satisfação de resolver um problema em aberto, a possibilidade de contribuir para o património e desenvolvimento da Matemática. Reconheceu que é "muito positivo" *(entrev. 2, p. 60)* o investigador ensinar e o professor realizar investigação (referia-se ao ensino superior), com um regime de docência equilibrado para não inviabilizar o trabalho de investigação.

Como vimos, as suas preferências lectivas incidem sobre cadeiras dos anos mais avançados, pelo menos a partir do 2º ano, e a principal razão que invocou para as justificar foi não gostar de dar aulas a turmas muito numerosas como acontece frequentemente nos primeiros anos. Manifestou interesse em ter uma relação próxima com os alunos e foi por isso muito crítico relativamente à política actual de optimização do *ratio* professor-aluno: "eu às vezes já tinha dificuldade em ter um contacto mais directo com cem alunos no anfiteatro, com duzentos alunos ou [mais]... é... é quase impossível, não é, é quase impossível; não vejo qual é o interesse que isso possa ter" *(entrev. 2, p. 41)*.

Na instituição onde é professor, Manuel Silva considerou que o currículo de Matemática é satisfatório quer na licenciatura em Matemática, quer em ensino da Matemática, e que tem havido progressos do ponto de vista pedagógico: "houve grandes melhorias" *(entrev. 2, p. 41)*. Em relação às dificuldades que os alunos manifestam, particularmente nos primeiros anos, para além da capacidade pedagógica e da clareza dos professores, sublinhou a importância de qualidades como o dinamismo e empenhamento no ensino para motivar os alunos. Sublinhou também a importância do estudante ter acesso a textos fornecidos pelo professor, podendo assim prestar mais atenção aos trabalhos das aulas e ter mais disponibilidade e oportunidade para intervir. Referiu ainda a necessidade de melhores bibliotecas, bem como o pouco tempo livre que os alunos têm e as poucas condições para trabalharem em grupo.

Referindo-se às suas aulas, este matemático disse sentir-se muito desconfortável quando se apercebe que os alunos "descolaram" *(entrev. 2, p. 33)*, ou seja, quando constata que os alunos deixaram de acompanhar os trabalhos da aula. "Custa-me muito", confessou, quando explicou por que não gosta de dar aulas a turmas muito grandes, "sentir que estou a perder muitos alunos, perder no sentido de não os estar a ver a seguir o que estou a fazer, isto para mim é um sacrifício" *(entrev. 2, p. 58)*. Em contrapartida, de onde retira maior gratificação, é verificar que os alunos se mantêm interessados, intervêm nas aulas e se gera alguma discussão:

> "Fico satisfeito quando há uma parte importante, quer dizer, significativa das pessoas que, enfim, que acha... acha interessante o que está a fazer, e que sobretudo tem intervenções, que faz intervenções interessantes, não é, perguntas. Mesmo durante as aulas teóricas acho que isso é muito importante. Para... para já, para quebrar um bocado aquele... 'ram-ram', e depois, porque permite uma certa discussão... e portanto, desperta o interesse dos outros alunos (...). Eu acho que isso é fundamental, mesmo a fazer atrasar a aula, não é. Acho que não tem problema nenhum."
>
> *(entrev. 2, p. 34)*

Ensino secundário. Manuel Silva justificou a dificuldade de muitos estudantes em acompanhar as aulas, essencialmente com duas espécies de razões. Começou por nomear a preparação deficiente que trazem do ensino secundário, salientando carências ao nível do cálculo — "têm má preparação calculatória, isto é, poucos hábitos de calcular" *(entrev. 2, p. 34)* — e uma visão muito formal e abstracta da Matemática. Explicou esta visão por parte dos alunos referindo a influência, ainda remanescente, da escola bourbakista e da Matemática Moderna. Foi, assim, de opinião que ainda há "marcas fortes" *(entrev. 2, p. 34)* deste movimento no ensino, geradoras da excessiva abstracção referida, considerando também que não se tem investido suficientemente nos aspectos de cálculo da Matemática a que deu grande importância:

> "Há demasiada abstracção e tentativa de escapar, portanto, a abordar problemas calculatórios que são fundamentais. Para... para a pessoa ter uma certa imagem da Matemática. Fazer os cálculos é uma imagem importante, não é. É Matemática."
>
> *(entrev. 2, pp. 34-35)*

Em seguida, explicou as dificuldades dos seus alunos, com o facto de muitos estarem numa licenciatura que escolheram como último recurso, existindo por isso estudantes em Matemática com pouco interesse na disciplina. "Muita gente vai para Matemática sem grande vocação", disse, sublinhando que "é necessário ter uma certa vontade e um certo gosto pela Matemática, para fazer Matemática, mesmo ao nível do professor de liceu" *(entrev. 2, p. 35)*. Explicando a sua ideia relativa à má preparação em cálculo dos estudantes, Manuel Silva mencionou dificuldades nos primeiros anos quer ao nível elementar, quer em assuntos mais avançados. Quando deu exemplos de pontos fracos no ensino secundário, retomou as ideias do deficiente domínio do cálculo e da visão formal da Matemática, dizendo:

> "Eu volto a insistir naquele ponto, o ponto calculatório. Quer dizer, acho que é um... É uma visão muito formal da Matemática, com falta de treino em... [cálculo] matemático, isto é, em cálculos elementares, derivação, enfim, de estudo de funções (...) Têm uma visão um bocado... Uma visão um bocado teórica da Matemática. [O] que provoca aquele papão da Matemática para muita gente, não é."
>
> *(entrev. 2, p. 50)*

Tendo-lhe pedido que esclarecesse por que considerava existir pouco investimento no cálculo no ensino secundário, ao mesmo tempo que afirma que o ensino praticado proporciona uma imagem da Matemática excessivamente formal, deu como exemplo o facto de os alunos não conseguirem resolver situações mais sofisticadas. Constata que os alunos chegam à Faculdade "mecanizados" e que "não têm um conhecimento prático que seja inspirado por uma boa formulação teórica" *(entrev. 2, p. 51)*. Isto é, como ainda acrescentou, com um mau domínio dos aspectos teóricos, mesmo ao nível de muitas noções básicas, de que deu como exemplos a noção de limite e de continuidade.

Ainda relativamente ao ensino secundário, Manuel Silva manifestou alguma esperança numa melhoria provocada pelos novos programas, e revelou concordância e simpatia com algumas das suas orientações e propostas. Nomeou particularmente as que se referem à utilização das calculadoras — "acho muito bem que utilizem as máquinas, isso é uma coisa importante hoje em dia" *(entrev. 2, p. 48)* — e a valorização das abordagens gráficas, da Estatística e da Geometria. Foi muito crítico sobre à diminuição do número de horas lectivas neste nível de ensino — "era fundamental aumentar o número de horas (...), no 12º ano deviam ser seis horas [por semana]" *(entrev. 2, p. 47)* — e criticou também o pouco tempo e apoio de que os professores dispõem para desenvolverem acções ao nível da sua própria formação. Chegou mesmo a referir a possibilidade de licenças sabáticas mais frequentes, a redução do horário lectivo e a introdução de maiores estímulos na carreira docente. Em sua opinião, muitos dos aspectos problemáticos do ensino secundário poderiam ser resolvidos com um maior investimento na formação dos professores.

Sobre a questão de um aluno do ensino secundário poder ser visto como um matemático, Manuel Silva considera que essa visão não tem muita razão de ser. Em seu entender, a motivação que o aluno tem em relação à Matemática, bem como o seu grau de autonomia e iniciativa nas actividades matemáticas que desenvolve, não se adequam a essa imagem. "Penso que não", disse a este respeito, "[o aluno] não está motivado para isso suficientemente", acrescentando ainda, "eu só chamaria matemático a um aluno que vai para a Universidade e que vai para o curso de Matemática por gosto, esse é um matemático, não é, antes disso penso que não" *(entrev. 2, p. 52)*. Na sequência, desta sua afirmação, passou-se o seguinte diálogo:

Inv. — Mas ele faz Matemática nas aulas, ou não?
M.S. — Faz, faz Matemática.
Inv. — Considera que o aluno faz...
M.S. — Faz a Matemática que lhe dizem para fazer, de certo modo.
Inv. — Pois. Não decide isso, não é?
M.S. — Pois. Enquanto que, a partir da Universidade, começa a ter uma certa capacidade de intervenção...
Inv. — Mas, de qualquer modo, acha que, por exemplo, a metáfora do aluno como matemático, ou seja, como tendo que fazer Matemática nas aulas para aprender Matemática...
M.S. — Sim, sim. Isso acho que deve fazer... Deve andar a fazer coisas ligadas à [Matemática]... [que] são Matemática. Nesse aspecto, está a praticar Matemática. Mas não é propriamente matemático porque não toma iniciativa como matemático.

(entrev. 2, pp. 53-54)

Relativamente às actividades de aula, ainda ao nível do ensino secundário, Manuel Silva considerou que, para serem consideradas como actividades matemáticas, seria importante constituírem momentos criativos recorrendo à resolução de problemas. Em sua opinião estes problemas devem ser inspirados em questões do quotidiano, reconhecendo que deste modo os alunos se interessam mais. A propósito, manifestou algum desagrado pelos problemas "tipo

Olimpíadas [da Matemática]" que considerou parecidos com "charadas" e "um bocado formais" *(entrev. 2; p. 54-55)*. Referiu ainda a importância em estimular os alunos para a pesquisa bibliográfica, bem como para o trabalho de grupo, pois considera que este tipo de trabalho é cada vez mais frequente em investigação matemática e que "isto devia ter repercussão na formação dos jovens" *(entrev. 2, p. 57)*. No caso do professor, Manuel Silva considerou-o como um matemático. "Eu acho que o professor [do ensino] secundário é um matemático", disse, justificando: "toma iniciativas e propõe problemas (...) não se pode dizer que possam ser problemas de investigação, mas são problemas muitas vezes da sua cabeça, não é" *(entrev. 2, p. 53)*. Manuel Silva sublinhou mesmo a importância dos professores do ensino secundário, com licenciatura em Matemática, se identificarem como matemáticos — "isso só era bom para eles e para os estudantes" *(entrev. 2, p. 54)* — acrescentando:

> "No momento em que foram alunos universitários de Matemática e tiveram essa formação, acho que têm capacidade para propor problemas, não é, e para os resolver e... discutir e tomar iniciativas. Nesse aspecto acho que são matemáticos."
>
> *(entrev. 2, p. 54)*

Manuel Nunes

Manuel Nunes foi o segundo matemático a ser entrevistado. Foi contactado nesse sentido no seu local de trabalho e logo acedeu a participar no estudo, de cujo tema e principais objectivos foi na altura informado. Tal como no caso do matemático anterior, realizaram-se duas entrevistas com alguns meses de intervalo. Qualquer uma delas foi marcada com antecedência e confirmada no dia anterior à sua realização.

A primeira entrevista decorreu no seu gabinete, no departamento onde trabalha. Conversámos à volta de uma mesa redonda, quase sem nada em cima, e perto de uma grande janela. Como mobiliário, havia ainda, uma secretária, cadeiras, um pequeno armário com portas de vidro e uma mesa com um computador e uma impressora. A segunda foi num outro gabinete, pois, entretanto, Manuel Nunes iniciara funções num elevado cargo directivo. Era um gabinete amplo e confortável, também com uma mesa redonda, destinada a reuniões de trabalho, e dispondo igualmente de uma secretária e mesa com computador e impressora. Em duas paredes estavam alguns armários com portas de vidro. Num dos cantos, ao pé da janela que ocupava toda a parede do fundo do gabinete e por onde entrava muito sol, havia uma planta.

O primeiro encontro ocorreu sensivelmente à combinada, tendo, no segundo, havido algum atraso por parte de Manuel Nunes que, no entanto, teve o cuidado de me prevenir pela sua secretária que me abriu o gabinete onde o esperei. As duas entrevistas realizaram-se à tarde e em qualquer delas ocorreram bastantes interrupções quer devido a telefonemas, quer a solicitações de pessoas que batiam à porta. A maior parte delas, porém, não foram muito demoradas. Isto sucedeu com mais frequência durante segunda entrevista, muito provavelmente por razões ligadas às funções que nessa altura Manuel Nunes tinha assumido na instituição onde trabalhava.

Ambas as conversas correram bem, com naturalidade e alguma fluência, sem que houvesse necessidade de intervenções significativas da minha parte, para além do colocar das questões da entrevista. Manuel Nunes pareceu interessado, procurando corresponder ao que era perguntado. Falou num tom sereno e de forma em geral bastante pausada, muitas vezes com intervenções longas, demonstrando sinceridade e convicção no que dizia. Nas suas respostas, em diversos momentos das entrevistas, fazia pausas relativamente demoradas, aparentando estar a reflectir no que iria dizer.

A primeira entrevista durou um pouco menos do que o previsto, cerca de uma hora, a segunda foi mais extensa mas não ultrapassou a hora e meia. Esta última, que como foi dito ocorreu alguns meses depois da anterior, começou com o esclarecimento de algumas questões sugeridas pela análise da primeira entrevista, prosseguindo com as questões previstas no guião. O ambiente e o tom geral em que ambas decorreram foram muito semelhantes.

A escolha da Matemática e da profissão

Manuel Nunes é professor no Departamento de Matemática de uma universidade de Lisboa, numa área da Matemática dita aplicada, onde exerce a docência e faz investigação científica desde meados dos anos setenta. Iniciou os seus estudos superiores num curso de Engenharia noutra universidade, onde esteve dois anos. Mudou depois para a Faculdade de Ciências de Lisboa, optando pela licenciatura em Matemática.

Para explicar como chegou à sua profissão, Manuel Nunes contou que a opção pela Matemática, não foi condicionada, nem orientada, por quaisquer objectivos profissionais. No seu horizonte havia o ensino que à época, como recordou, era das poucas saídas profissionais, mas não pensava muito nisso na altura, e a escolha que realizou foi motivada apenas por uma questão de gosto. "Quando fiz a minha opção pela licenciatura em Matemática, honestamente, não tinha uma concretização profissional", disse a este propósito, continuando:

> "Nem mesmo, assim muito directamente, pensava que iria para o ensino (...). Foi mais uma opção no sentido de estudar aquilo que me dava prazer, do que propriamente uma visão profissional do que é que ia... do que é que ia a ser a minha actividade profissional no futuro. Nesses anos, convínhamos, também não valia a pena especular muito. Era ensino, pura e simplesmente ensino."
>
> *(entrev. 1, p. 1)*

Já aluno na Faculdade de Ciências, Manuel Nunes foi convidado para o cargo de monitor de uma cadeira de Matemática noutra instituição de ensino superior, tendo começado desta maneira a sua carreira académica, no ano em que, como fez notar, se criou esse cargo em universidades portuguesas. Logo no ano seguinte, agora na Faculdade de Ciências, continuou como monitor, também em Matemática, a que se seguiu o concurso para assistente e, alguns anos mais tarde, a realização do doutoramento no estrangeiro.

Manuel Nunes, como disse, optou pela Matemática por uma questão de gosto. Não se recordou com nitidez quando começou a sentir esse gosto, mas situou a sua origem nos primeiros anos da sua escolaridade, dando a entender que no ensino secundário já sentia uma atracção pela Matemática. Referindo-se à sua experiência nesta disciplina, anterior à sua entrada na Universidade, valorizou muito os momentos de iniciação e o papel que o professor aí tem. "O que é que é importante na aprendizagem da Matemática?", interrogou-se ele próprio a este propósito, respondendo logo a seguir:

> "Penso que é determinante o primeiro contacto não ser agressivo, [e], portanto, depende muito de quem nos ensina os primeiros passos. (...) Se a pessoa tem um namoro fácil, acho que corre tudo bem. Se não é muito agressivo, se não esbarra com dificuldades iniciais, com... [E], nos primeiros tempos, tem que se associar isso sempre ao professor."
>
> *(entrev. 1, p. 3)*

Em sua opinião, o professor tem que ser capaz de "transmitir a essência do raciocínio" *(entrev. 1, p. 3)*, de ir fazendo compreender ao aluno os vários conceitos e processos matemáticos, e procurar assim evitar a simples mecanização. São as dificuldades em compreender os primeiros conceitos, diz Manuel Nunes, que acabam por conduzir o aluno à "rejeição" da Matemática e a assumir mesmo, muitas vezes, a imagem de que não "dá" para essa disciplina. Considerou esta imagem enganadora, "ou todos damos para a Matemática, ou todos não damos", disse a este respeito, acrescentando que muita coisa depende do "primeiro encontro com a Matemática" *(entrev. 1, p. 4)*.

Embora tivesse considerado o seu professor do 1° ciclo "extremamente tradicional [e] mesmo negativo"*(entrev. 1, p. 5)*, a experiência que Manuel Nunes viveu no 2° ciclo, e que caracterizou com expressões como "contacto com a descoberta", "a Matemática como uma ciência experimental", "combinação entre os raciocínios dedutivo e indutivo", utilização de "charadas" *(entrev. 1, p. 6)*, terá marcado positivamente, e de forma irreversível, a sua relação com a Matemática. Na verdade, como contou, o seu bom relacionamento com esta disciplina resistiu, apesar de no ciclo seguinte de escolaridade, o trabalho em Matemática ter voltado a perder as características enunciadas. "Curiosamente", disse, "no 3° ciclo voltou-se quase ao estilo [do 1°]" mas, acrescentou, "já tinha agarrado a beleza da Matemática, já não havia muito quem a pudesse destruir..." *(entrev. 1, p. 5)*. Sobre a passagem para o ensino superior, considerou que a transição decorreu "numa evolução natural", com "diferenças" mas sem "choques" *(entrev. 1, p. 9)*.

De todo o seu percurso escolar em Matemática, Manuel Nunes valoriza sobretudo o papel das experiências positivas que considera na origem da sua boa relação com essa disciplina. Já na Universidade, essa boa relação veio a manter-se e a aprofundar-se. A todo este processo associou sempre os bons professores que teve, particularmente na Faculdade de Ciências: "não me consigo lembrar de um professor mau" *(entrev. 1, p. 8)*.

Como foi mencionado, Manuel Nunes trabalha em Matemática aplicada. Ao explicar a sua inserção nesta área, esclareceu que desenvolve o seu trabalho, não em domínios com que ela é tradicionalmente identificada — como as aplicações à Física, equações diferenciais, certa Análise funcional — mas em investigação operacional que, em sua opinião, é essencialmente Matemática. Trabalha com "modelos matemáticos aplicados à resolução de problemas da vida corrente, [sobretudo] no campo da gestão e da produção" *(entrev. 1, p. 11)* e, por esta razão, considerou que é Matemática aplicada.

Manuel Nunes justificou a preferência por esta área da Matemática, com a gratificação que sente ao ver utilizado o seu trabalho numa situação prática real. Esta possibilidade, em seu entender, exerce algum fascínio, inclusivamente sobre aqueles que o negam: "penso que toda a gente, mesmo aqueles que dizem que não, têm alguma sedução em que as coisas que fazem tenham alguma... tenham alguma concretização" *(entrev. 1, p. 11)*. E, referindo-se especificamente aos matemáticos, continuou:

> "Eu penso que qualquer um tem algum prazer especial em ver concretizado aquilo que faz, num caso concreto. Em ver que tipo de ferramentas matemáticas correspondem a alguma coisa da vida real, a uma coisa com que a gente pode... pode... de alguma forma interferir, associar ou relacionar. Isso parece-me que é algo natural.
> Mesmo naqueles que dizem que não (...). Eu acho que as pessoas quando dizem isso estão mais a dizer assim, 'eu não estou pressionado por ver uma imediata aplicação disto', mas se a virem, com certeza que (...) ficam mais satisfeitos."
>
> *(entrev. 1, pp. 11-12)*

Manuel Nunes considerou que teve a "sorte" de ter começado cedo a trabalhar com problemas reais, propostos do exterior da Faculdade, e em modelos matemáticos para esses problemas. Este trabalho surgiu ainda nos últimos anos do curso, e relacionou-o com o desenvolvimento da sua motivação pelas matemáticas aplicadas, tal como o estudo numa cadeira de programação linear pela qual sentiu "algum amor à primeira vista" *(entrev. 1, p. 12)*, sentimento que, também aqui, associou ao professor da cadeira. Falou ainda no seu entusiasmo pela teoria de grafos, "com aplicações bastante interessantes", e na automatização combinatória, de cujo trabalho disse retirar grande gratificação, pela possibilidade que ele oferece em conciliar investigação fundamental e respectiva aplicação: "a automatização combinatória que é no fundo aquele gozo supremo do tipo que gosta de fazer coisas assim esquisitas de Matemática com muita aplicação" *(entrev. 1, p. 13)*.

Esta possibilidade em ver aplicados os estudos que realiza, veio a ser de novo invocada como uma das principais compensações que este matemático retira do seu trabalho profissional. Do ponto de vista da investigação, para além da liberdade que reconhece ter — embora a qualificasse como sendo muitas vezes "mais espiritual que propriamente real" *(entrev. 2, p. 2)* — Manuel Nunes considerou que essas compensações surgem com facilidade e naturalidade, uma vez que a sua investigação se desenvolve em estreita relação com problemas reais concretos cuja solução é procurada e que, simultaneamente a estimulam:

> "A investigação que... que eu faço na minha área é uma investigação [em] que é mais fácil encontrar compensações porque é... Embora possa ser olhada num plano muito abstracto, contém fortes ligações, é facilmente utilizável para... para abordagens de problemas da vida real. Tem essa... tem essa grande... Essa grande fonte de estímulo que é a pessoa que... Tem permanentes solicitações relativamente a problemas para resolver (...). Mas pelo facto de... pelo simples facto de termos muita... muita relação com o mundo... com o mundo real, existem essas solicitações... permanentes, portanto há um... Daí também vem um estímulo importante."
>
> *(entrev. 2, p. 3)*

Referindo-se à docência, Manuel Nunes vê também esta actividade como fonte de compensações profissionais, em sua opinião, no entanto, frequentemente anuladas ou fortemente reduzidas, pelas condições em que muitas vezes ela é exercida: "O ensino é... acho que para mim é estimulante, quer dizer... penso que... o acto de ensinar é extremamente agradável... muitas vezes as condições em que é feito, é que... é que destrói um pouco este prazer, não é?" *(entrev. 2, p. 2)*. No seu caso pessoal não sente muito este problema, pois em geral orienta cientificamente teses de mestrado e doutoramento, onde não se fazem sentir as condições mais difíceis em termos de instalações, número de alunos ou de falta de motivação dos estudantes.

A Matemática

Na primeira entrevista, logo no seu início, procurando explicar o que via na Matemática que despertou o seu gosto por esta disciplina, Manuel Nunes, depois de uma pausa demorada e de algum esforço de memória — "vamos lá ver se eu me consigo lembrar" *(entrev. 1, p. 2)* — mencionou, em primeiro lugar, a "elegância" *(entrev. 1, p. 2)* dos raciocínios matemáticos. Esta qualidade viria a ser de novo invocada mais tarde, já na segunda entrevista, quando Manuel Nunes foi confrontado com uma frase de um matemático célebre, onde se fazia a apologia da harmonia e da beleza em Matemática[1]. Na sua reacção, pareceu concordar no essencial com as ideias subjacentes à frase apresentada, considerando que de alguma forma caracterizam certos matemáticos, no modo como vêem a ciência com que trabalham. "Um matemático", disse, "recusa-se a olhar para as coisas que não tenham harmonia", reconhecendo, ele próprio, esse 'destino' na Matemática: "tudo acaba por ficar harmónico, cedo ou tarde, não é, sobretudo o simples"*(entrev. 2, p. 10)*. Reconheceu assim uma espécie de "harmonia natural" na Matemática, a tal "elegância", como também aqui lhe chamou, considerando que este termo é aquele que "melhor traduz a beleza em Matemática" *(entrev. 2, p. 10)*.

Em segundo lugar, Manuel Nunes mencionou o carácter lógico do desenvolvimento dos raciocínios matemáticos. Referindo-se à Matemática escolar, lembrou que era sobretudo este seu carácter que o atraía, o facto de sentir que em Matemática se progredia sem "saltos no escuro" *(entrev. 1, p. 2)* para determinado objectivo em vista, e que isso lhe dava segurança:

> "A parte que me seduzia mais era aquela parte da gente ter o tal quadro final onde queria chegar e, aos poucos, progressivamente, irmos construindo o caminho para lá chegar, de uma forma lógica e... (pausa, 5 s) segura, que é uma coisa que... [a Matemática tinha]."
>
> *(entrev. 1, p. 2)*

[1] Hardy (1988, p. 2003), anexo 2, episódio 3.

Prosseguindo nesta explicação, Manuel Nunes afirmou que reconhecia na Matemática uma grande vantagem sobre as ciências experimentais que decorria precisamente do que acabava de dizer. A experimentação, como contou, não lhe dava a segurança do raciocínio lógico matemático. "Eu pelo menos sentia uma grande insegurança", disse o matemático, referindo-se ao trabalho experimental, e continuou, "enquanto em Matemática não, nós fazíamos aquele raciocínio, verificávamos as contas, ficávamos satisfeitos: pronto, agora já posso ir para o passo seguinte, porque até aqui está arrumado *(entrev. 1, p. 3)*.

Manuel Nunes, a propósito da sua expressão "saltos no escuro", numa espécie de parêntesis na descrição que fazia, fez questão de dizer que na investigação matemática nem sempre se procede do modo que estava a descrever. O trabalho de investigação, como salientou o matemático, desenvolve-se por vezes sem um objectivo totalmente claro e seguindo percursos nem sempre completamente definidos:

> "Depois, na vida, essa Matemática, quando se investiga, às vezes há uma certa... às vezes, damos um pouco um salto no escuro. O que é que chamo um salto no escuro? Há uma função, a gente quer fazer qualquer coisa e não sabemos bem porquê. Sabemos que tem esta propriedade, tem aquela. Não tem[os] propriamente um rumo final, não tem[os] um resultado, mesmo que não seja completamente esboçado. (...) Às vezes a pessoa está na brincadeira e depois olha para trás e diz, isto é capaz de ter algum interesse."
>
> *(entrev. 1, p. 2)*

A Matemática e as outras ciências, os modelos matemáticos. Comparando a Matemática com os outros domínios científicos, e analisando o papel que ela desempenha nestes domínios, Manuel Nunes salientou, por um lado, o facto de a Matemática constituir um "instrumento imprescindível" *(entrev. 2, p. 18)* para a maioria das áreas científicas e de intervir "praticamente em todas as áreas do conhecimento" *(entrev. 2, p. 19)*, por outro lado, o facto de a Matemática introduzir um salto qualitativo no estatuto científico dessas áreas, associando-a a uma mudança para uma concepção menos empírica da ciência:

> "Normalmente a Matemática está muito associada a mudanças de estádios de desenvolvimento científico noutras ciências, não é? No fundo, parece-me que [constitui] o ponto... de viragem de uma visão mais

experimentalista, mais empírica... Quer dizer, não é experimentalista, [pois] experimentalista é sempre, mas de [um]a visão mais empírica da [ciência]".

(entrev. 2, p. 18)

Explicando as suas ideias sobre as relações da Matemática com as outras ciências, concordou que existe uma espécie de influência recíproca. "A Matemática foi à Física e voltou" *(entrev. 2, p. 19)*, disse o matemático, acrescentando que foi desse modo que a Matemática aplicada nasceu. Diga-se a propósito que, um pouco à frente na entrevista, Manuel Nunes foi confrontado com frases onde se defendia a importância e fecundidade das relações da Matemática com os outros domínios científicos[1]. Na sua reacção a estas frases, manifestou total concordância com, num caso, a ideia de que o desenvolvimento da Matemática está intimamente ligado com o das outras ciências e que muitas das suas melhores inspirações têm origem nelas, no outro, a de que um eventual isolamento dos matemáticos, poder vir a condenar o seu trabalho à esterilidade.

Ainda sobre a relação da Matemática com as outras ciências, Manuel Nunes fez questão de contrariar a visão, em sua opinião muito corrente, de que a intervenção da Matemática nos outros campos científicos tem por objectivo "pôr ordem e rigor" *(entrev. 2, p. 19)* nesses campos. Em seu entender, essa intervenção consiste sobretudo numa contribuição para o estudo e compreensão dos fenómenos e situações nessas áreas científicas, proporcionando modelos matemáticos para esse estudo; são estes modelos que permitem progredir na explicação, previsão e controlo dessas situações e fenómenos, e é o recurso à capacidade de modelização da Matemática que possibilita, às outras ciências, uma abordagem do seu campo de estudo, não meramente empírica.

Cabe aqui referir que, a propósito da harmonia e elegância da Matemática, Manuel Nunes referiu que os modelos matemáticos, embora permitam conhecer melhor a realidade, são "aproximações" *(entrev. 2, p. 10)* que é necessário melhorar sempre, mas que mantêm sempre algum grau de imperfeição:

"[Os modelos matemáticos] são representações aproximadas [da realidade] que tentamos refinar. Vão-nos dando mais informação, no fundo, até há aqui uma inter-actuação, não é? Vamos tendo mais

[1] Anexo 2, episódios 4 e 5.

> informação sobre a realidade [e] ela depois é transportada para o modelo. Dificilmente chegamos a uma situação em que digamos: bom, temos aqui exactamente um modelo... um modelo real, um modelo matemático que traduz [exactamente] esta situação."
>
> *(entrev. 2, p. 10)*

Trata-se aqui da mesma ideia que Manuel Nunes veio a retomar mais tarde, falando ainda na relação da Matemática com as ciências: com a Matemática é possível elaborar modelos que permitem uma melhor compreensão da realidade e o progresso do conhecimento em diversos campos científicos; por sua vez, a utilização dos modelos matemáticos nesses campos científicos, "vem revelar novas fraquezas" do conhecimento em Matemática, fraquezas que "os matemáticos, por vezes têm dificuldade em reconhecer" *(entrev. 2, p. 22)*.

Matemática pura e Matemática aplicada. Questionado sobre a divisão habitual distinguindo dois tipos de Matemática, a pura e a aplicada, Manuel Nunes pareceu não se identificar com essa divisão, não vendo justificação de substância para ela. "Do meu ponto de vista, é uma falsa divisão" *(entrev. 2, p. 4)*, disse a propósito, considerando que a distinção só se justifica historicamente.

Para explicar esta sua ideia, o matemático recorreu aos exemplos da Análise e da Álgebra, por um lado, e ao das equações diferenciais, por outro. Neste último caso, o trabalho em Matemática visa a resolução de problemas "concretos" que lhe são colocados a partir de outros domínios (no exemplo citado, foi referida a Física), e, por isso, é um exemplo de uma área que tradicionalmente se insere na Matemática aplicada. No primeiro caso, as áreas matemáticas referidas são entendidas como áreas de estudo desligadas de qualquer aplicação, onde se faz "Matemática pela Matemática" *(entrev. 2, p. 4)* e, por esta razão, como disse, são habitualmente inseridas na Matemática pura. Em relação a esta última posição, Manuel Nunes afirmou:

> "Bom, [isto] é falso porquê? Porque... porque a Análise, na verdade, está relacionada com problemas da vida real. Tem que estar... não é?... Quer por via directa, quer por via indirecta. No caso das equações diferenciais [por exemplo], sem a Análise não chegávamos lá."
>
> *(entrev. 2, p. 5)*

Há assim, da parte do matemático, um distanciamento face à perspectiva que isola a Matemática, vendo-a como um domínio sem qualquer ligação com o 'exterior', considerando que tal perspectiva não corresponde à realidade desta ciência. Reforçando a sua ideia, Manuel Nunes deu exemplos onde as áreas referidas têm vindo a ter crescente aplicação e que, em seu entender, mostram a existência dessa ligação, e, por conseguinte, a inadequação de uma distinção absoluta entre Matemática pura e aplicada: desde tópicos muito abstractos da topologia, que têm relações com a teoria das probabilidades, a áreas da Álgebra com aplicações na teoria da computação, na teoria da linguagem, na inteligência artificial. Por estas razões, Manuel Nunes considera a distinção referida "uma falsa distinção" *(entrev. 2, p. 5)* que subsiste por razões históricas e institucionais.

Ainda a propósito da Matemática e das suas aplicações, foi pedido a Manuel Nunes uma reacção à seguinte frase de um matemático célebre: "Se um problema de xadrez é, em sentido grosseiro, 'inútil', então, tal é igualmente verdade para a maior parte da melhor Matemática (...); apenas uma pequena parte da Matemática tem utilidade prática e que essa parte é relativamente desinteressante"[1]. Manuel Nunes reagiu assim:

> "Eu não concordo... Eu diria que apenas... Apenas uma pequena parte da Matemática... (pausa, 5 s) tem utilidade prática visível, digamos. Mas, mesmo assim, eu não lhe chamaria uma pequena parte mas, enfim. Se me dissesse utilidade prática visível, imediata, não é?... Isto, o primeiro aspecto... Em segundo lugar, não acho essa parte relativamente desinteressante de forma alguma."
>
> *(entrev. 2, pp. 7-8)*

Também aqui Manuel Nunes se demarca de uma visão que desvaloriza os aspectos aplicados da Matemática. Aceitou que tal visão pudesse ser possível nas primeiras décadas do século XX, altura em que, face aos dias de hoje, se poderia considerar que "a utilidade prática visível [da Matemática] era mesmo pequena" *(entrev. 2, p. 8)*. Em sua opinião, tal não se poderá dizer actualmente, pois é visível a grande utilidade dos resultados matemáticos e que a própria Matemática também se enriqueceu com a sua utilização. Deu exemplos de problemas considerados resolvidos que, numa perspectiva mais recente, exactamente

[1] Hardy (1988, p. 2005), anexo 2, episódio 2.

quando se colocaram novas exigências exteriores à Matemática, se tornaram problemas em aberto, ou pelo menos, não completamente resolvidos, gerando novos desafios e enriquecimentos nesta ciência. "[Trata-se do exemplo de um problema] que não tem utilidade prática nos anos 40, que afinal está na [dita] parte 'interessante' da Matemática, [e] que tem utilidade prática nos anos 90" *(entrev. 2, p. 9)*, comentou a propósito o matemático. Daí ter manifestado reservas face a posições muito definitivas e absolutas, como aquela com que tinha sido confrontado, defendendo que apenas uma pequena parte da Matemática tem utilidade prática. "Eu pelo menos inibo-me", disse, "acho perigoso comentar que isso não serve para nada" *(entrev. 2, p. 9)*, mesmo tratando-se de zonas muito abstractas da Matemática.

Recordemos que Manuel Nunes justificou a sua preferência pela Matemática aplicada com a gratificação que sente quando o estudo que desenvolve pode ser utilizado numa situação prática real. O trabalho na sua área específica, como explicou, permite-lhe desenvolver investigação fundamental e, simultaneamente, usufruir do prazer em ver essa investigação aplicada. Este "prazer especial" *(entrev. 1, p. 11)* que sente quando tal acontece, Manuel Nunes estendeu-o a todos os matemáticos, mesmo àqueles que dizem desvalorizar a eventual utilidade prática do trabalho que desenvolvem, reconhecendo no entanto que, em muitos deles, isso pode não constituir a motivação mais imediata para esse trabalho.

A Matemática: um edifício em construção. Pronunciando-se sobre a dicotomia invenção-descoberta em Matemática na primeira entrevista, Manuel Nunes procurou resolvê-la usando o termo "criação", defendendo que existe sempre, em qualquer das situações, um grande esforço criativo. Acabou no entanto por reconhecer que os teoremas matemáticos correspondem a situações de descoberta, "de facto ele estava lá" *(entrev. 1, 24)*, disse, referindo-se a um teorema. A certa altura da segunda entrevista, abordou-se a questão da demonstração em Matemática e, em especial, o carácter estável das proposições matemáticas consideradas demonstradas. Sobre este assunto passou-se o seguinte diálogo:

Inv. — Uma vez um teorema demonstrado, acha que isso se torna eternamente válido, ou não? Qual é a sua posição sobre isso?
M.N. — (pausa, 8 s) Quer dizer, o teorema se fica...
Inv. — Demonstrado, um teorema que foi demonstrado.

M.N. — Quer dizer que não vale a pena olhar para ele novamente?
Inv. — Não. Não é bem isso. É se a conjectura [demonstrada] fica considerada verdadeira?...
M.N. — Se [se] conseguir provar... fica provado, não é? Quer dizer...
Inv. — Mas, a pergunta é esta... As verdades matemáticas são eternas? Poder-se-ia pôr assim, desta maneira mais dramática.
M.N. — Essa é difícil (riu-se). Aparentemente sim, não é? Bem, tudo depende da axiomática, com que a gente parte, não é? Dentro da mesma axiomática... o que está demonstrado, bem demonstrado... O que pode acontecer, e acontece com alguma frequência, é que não estava bem demonstrado.
Inv. — Sim, mas se obedecer às regras lógicas e do sistema...
M.N. — Estará demonstrado.

(entrev. 2, pp. 14-15)

Ainda sobre a questão da demonstração, e tendo como referência o teorema das quatro cores, Manuel Nunes não pôs em questão a validade das provas computacionais, considerando que apenas resolvem uma dificuldade nesse tipo de demonstrações: realizar em tempo útil as operações necessárias para a demonstração. Em sua opinião, um teorema estará demonstrado por essa via se a demonstração estiver correcta, e não vê qualquer problema no facto de ela ter sido realizada por um computador: "se uma máquina o fez em vez de um cidadão, não vejo mal nenhum nisso, não é?" *(entrev. 2, p. 16)*.

Tendo pedido uma reacção face a perspectivas que defendem que em Matemática já se alcançou o rigor absoluto[1] e que a sua linguagem está definitivamente estabelecida, sendo por isso vista como uma ciência exacta por excelência, Manuel Nunes, voltou recusar a sua anuência a este tipo de afirmações de carácter absoluto:

> "Eu continuo a dizer que essas frases são muito perigosas. É muito perigoso dizer que finalmente é encontrado o rigor absoluto. Que está assegurado o rigor absoluto... (pausa, 7 s). Eu acho que a Matemática como todas as outras ciências tem os seus... tem os seus fracos, não é, os seus pontos débeis. Recuso-me a vê-la como uma coisa... perfeita-

[1] Referi de memória uma afirmação de Poincaré (1988) no princípio do século XX que dizia "pode-se pois hoje dizer que o rigor absoluto [em Matemática] foi atingido" (p. 11).

> mente cimentada, sólida. Boa parte do conhecimento matemático é assente num rigor, numa estrutura estável, digamos. Mas há... há naturalmente... [pontos fracos]".
>
> *(entrev. 2, p. 18)*

Transparece das afirmações de Manuel Nunes sobre a demonstração e as noções de verdade e rigor, por um lado, uma certa relativização destas noções, e, por outro, a ideia de que existem, como chamou pontos "fracos" na Matemática. Se uma parte significativa do conhecimento matemático se pode considerar certo, isto não implica, em seu entender, uma visão da Matemática como uma estrutura rígida, completa, perfeitamente estabelecida.

No quadro de uma determinada axiomática, como disse Manuel Nunes, uma conjectura demonstrada, seguindo os preceitos da lógica e os cânones estabelecidos, fica aceite como uma proposição verdadeira nesse quadro. No entanto, em seu entender, isto não significa que a proposição demonstrada não seja revisitada, para eventuais desenvolvimentos, ou que não existam erros nas demonstrações efectuadas. Para Manuel Nunes, se uma "boa parte" da Matemática "[está] assente numa estrutura estável" *(entrev. 2, p. 18)*, não será esta a situação em toda a Matemática que, enquanto ciência em desenvolvimento, terá sempre zonas de indefinição e de instabilidade. Cabe aqui dizer que Manuel Nunes, quando enumerou alguns conselhos que daria a um seu aluno que pretendesse vir a ser matemático, começou por dizer que ele deveria olhar para a Matemática "como um edifício em construção", explicando assim a sua ideia:

> "[Dir-lhe-ia que] tentasse perceber que a Matemática... (pausa, 11 s) não é exactamente algo que esteja bem definido e que nos compete a nós, no fundo, descobrir (...) que a resposta aos nossos problemas pode estar numa janela ou numa pedra, consoante a... a construção que nós próprios e outros possamos ir fazendo [d]o dito edifício."
>
> *(entrev. 2, p. 32)*

Manuel Nunes considerou esta recomendação fundamental, insistindo na importância de uma pessoa não se deixar "esmagar" pelo carácter rigoroso já assegurado em muitas das partes da Matemática e de admitir que esta ciência, como outras, "tem fraquezas, que precisa ainda de andaimes" *(entrev. 2, p. 32)*. Esta ideia relaciona-se com uma intervenção do matemático, logo no princípio da primeira entrevista, ao justificar o gosto pela sua disciplina. Alertava aí para o grande perigo que existe no ensino em apresentar a Matemática muito "perfeitinha", "como um edifício que a gente tem que construir os alicerces todos, para depois poder fazer as paredes" *(entrev. 1, p. 4)*.

A este conselho, Manuel Nunes acrescentou mais dois. Chamar a atenção para a plausibilidade dos resultados obtidos, antes da procura de uma demonstração formal. Ou seja, como explicou o matemático, um resultado pode fazer sentido, eventualmente com base no confronto com situações experimentais, e não existirem condições imediatas para a sua demonstração numa perspectiva lógica dedutiva. E, por fim, ser rigoroso. Numa síntese sobre as recomendações que faria a um aluno que quisesse ser matemático, disse: "não encarar a Matemática como um edifício completo, procurar sempre indagar do sentido dos resultados e ser rigoroso na demonstração deles" *(entrev. 2, p. 32)*.

A actividade matemática

Manuel Nunes, como vimos, justificou a escolha da área da Matemática aplicada, pela atracção que exerce sobre ele o facto de a investigação que realiza poder ser utilizada em situações reais. Considerou esta atracção natural e que, de uma forma geral, todos os matemáticos a sentem, embora, eventualmente, possam não o admitir. Em sua opinião, qualquer matemático sente prazer quando o seu trabalho de investigação tem uma utilização prática, ainda que, no desenvolvimento desse trabalho, possa não a visar directamente, nem tê-la como principal motivação e orientação.

No seu caso pessoal, como Manuel Nunes sublinhou, a ligação entre a investigação fundamental e as suas aplicações é muito imediata, pois desenvolve-se de uma forma fortemente relacionada com questões concretas que é necessário resolver, e é até frequentemente motivada por essas questões que a estimulam permanentemente. Como também sublinhou, apesar de a área em que trabalha se poder apresentar com um carácter muito abstracto, a investigação que realiza aplica-se com facilidade na resolução de problemas da vida real. Daí o seu sentimento de privilégio, pelo facto de poder usufruir do prazer em realizar "coisas esquisitas" em Matemática mas que têm "muita aplicação" *(entrev. 1, p. 13)*, o que também se depreende de uma outra consideração do matemático, ainda a propósito da sua área de trabalho que a seguir apresento.

> "De facto a... os problemas da [minha área] têm muito essa característica, têm já uma grande aplicação prática, mas, simultaneamente, [têm] uma grande exigência... de desenvolvimento teórico sempre associado. Aplica-se, a prática exige mais desenvolvimento teórico que permite resolver melhor a prática, mas ela volta a pedir mais, e assim por diante. É um processo interessante.
>
> *(entrev. 1, p. 15).*

A actividade de investigação matemática de Manuel Nunes situa-se assim numa zona com forte interacção com a realidade o que, como foi referido, constitui para este matemático fonte de motivação e gratificação. Falando da sua prática de pesquisa, o matemático salientou ainda, como muito cativante, o facto de a crescente complexidade das questões que aí são colocadas, obrigar a retomar problemas já resolvidos e a procurar outras formas e processos para conseguir resolver os que entretanto surgiram.

Quando lhe pedi que indicasse alguns elementos que, no seu entender, pudessem servir para caracterizar uma actividade como matemática, Manuel Nunes, após uma pausa demorada, mencionou a circunstância de ela "lidar com conceitos matemáticos", de, como acrescentou, os "trabalhar, desenvolver, aplicar e testar" *(entrev. 2, p. 29)*. Como exemplo, deu o trabalho com os números, o facto de "pura e simplesmente lidar com os números" *(entrev. 2, p. 29-30)*. Em sua opinião, 'fazer contas' é uma actividade matemática — "em última análise, eu acho que é sempre, não é?" *(entrev. 2, p. 29)* — e concordou que a pesquisa de regularidades, nomeadamente com números, é uma actividade matemática corrente, com vários exemplos na história da Matemática. Na caracterização que procurava fazer da actividade matemática, concordou ainda em incluir a demonstração e a modelação. É de salientar que este último aspecto, ainda que com outra terminologia, tinha já sido mencionado. Na verdade, perante a pergunta 'o que é fazer Matemática?' que visava desencadear aquela caracterização, Manuel Nunes, referindo-se apenas ao seu caso pessoal, respondeu que, por um lado, era "encontrar modelos matemáticos que ajudem a descrever situações reais" e, por outro, "desenvolver técnicas e métodos de abordagem desses modelos" *(entrev. 2, p. 28)*.

O trabalho com modelos matemáticos. Para dar conta do que consiste o seu trabalho de investigação matemática, Manuel Nunes descreve-o essencialmente como um processo de criação e desenvolvimento de modelos matemáticos:

> No meu caso concreto, com o tipo de questões que costumo lidar, o percurso normal é de facto... (pausa, 9 s) pegar num modelo matemático ou desenvolver um modelo matemático. Digamos, umas vezes, é porque já existe esse modelo, eu sei que este modelo é assim. [Em] outros casos surge-nos uma questão directa prática, estudamos um caso e tentamos encontrar modelos matemáticos. Um ou mais modelos matemáticos, para este problema, para aquele ou para todos. Neste caso concreto há um esforço de modelização...
>
> *(entrev. 1, p. 16)*

Nas diversas situações, o matemático explicou que se torna necessário o desenvolvimento de ferramentas para a resolução da questão colocada, ferramentas que "permitam obter soluções admissíveis, soluções óptimas, soluções para o referido modelo" *(entrev. 1, p. 16)*. Para isso, esclareceu que o modo de proceder é habitualmente sempre o mesmo: identificar o que já foi desenvolvido na área em consideração e verificar a possibilidade da sua utilização. Manuel Nunes disse que, nesta fase, o essencial é perceber porque determinada técnica funciona, e que é esta procura de compreensão que gera teoria matemática. Deu o exemplo da sua tese de doutoramento onde, como explicou, utilizou uma determinada técnica nunca antes aplicada no problema escolhido — "fui ver até que ponto é que dava, porque é que não dava (...), que aprofundamentos no fundo se podiam fazer" *(entrev. 1, p. 17)*. Considerando que um modelo matemático é uma representação sempre aproximada da realidade, Manuel Nunes referiu que pode acontecer dispor-se de um modelo válido para uma situação e, na aplicação à situação concreta, darmo-nos conta da sua inadequação. Isto pode suceder, não por o modelo não representar a realidade, mas por verificarmos que, nessa aplicação, ele "não tem tratamento matemático possível" *(entrev. 1, p. 17)* com as ferramentas de que se dispõe no momento. Perante uma situação como esta o trabalho de investigação pode prosseguir com a reformulação do modelo ou o aperfeiçoamento das ferramentas disponíveis:

> "Normalmente tratam-se as duas pois... É experiência e o *feeling* da pessoa que ao fim de algum tempo diz que o melhor é repensar o

> modelo, se a gente o deve puxar para aqui e fazer uma reestruturação de outro tipo, talvez seja mais atacável. Outras vezes a gente acredita que o modelo... Não é bem acreditar, é que o modelo já tem uma estrutura, uma elegância tão visível que a gente tem mesmo fé que não é muito ali, [mas que] temos [é] que trabalhar e desenvolver mais as ferramentas que nos permitem resolvê-lo."
>
> *(entrev. 1, p. 18)*

Nesta descrição, podem ser identificadas as duas componentes que Manuel Nunes destaca no seu trabalho matemático: criação e desenvolvimento de modelos matemáticos; e, concepção e desenvolvimento de técnicas e processos para trabalhar com estes modelos.

O papel da experiência, o papel do computador. Solicitado a pronunciar-se sobre a existência de eventuais semelhanças entre a Matemática e as outras ciências ou entre a actividade do matemático e a de outro cientista, Manuel Nunes começou por considerar que isso só acontecia em alguns aspectos. Reconheceu que no que diz respeito à "atitude científica poderão não existir diferenças importantes, sendo no entanto de opinião que se verificam no que se refere à metodologia própria de cada campo, no "modo de chegar" *(entrev. 2, p. 23)* ao conhecimento científico. A este respeito, considerou que as diferenças são importantes, caracterizando a metodologia da Matemática como "mais dedutiva" e a das outras ciências como "mais experimental" *(entrev. 2, p. 23)*.

Aludindo ao papel da experiência, Manuel Nunes manifestou a opinião que, em Matemática, tradicionalmente, é-lhe atribuída pouca importância. No entanto, não se identificou completamente com esta posição, como se pode depreender de diversas afirmações — por exemplo, "para mim [a experiência] tem valor"; ou "eu não me importo nada de fazer uma experiência" *(entrev. 2, p. 23)* — e fez notar que a evolução tecnológica tem aqui um papel importante:

> "Repare que tem também muito a ver com os instrumentos que temos hoje em dia à nossa mão, não é? Convinhamos que há trinta ou quarenta anos atrás, a experimentação era dolorosa em Matemática, não é? (...) Quer dizer, era impensável fazer experimentação, nem que fosse para ver... assim... gerar um grafo e ver se era possível, se não era possível. (...) Quer dizer, isto não serve de prova, mas é uma maneira que leva... É o mesmo que leva o experimentalista noutras áreas

a fazer... Se ele faz a mesma experiência e conduz ao mesmo resultado, tem que haver uma lógica para aquilo ter ocorrido. Ele então começa a debruçar-se sobre essa lógica."

(entrev. 2, p. 24)

Em seu entender, mesmo em situações de menor apoio tecnológico, os matemáticos usam o tipo de procedimento agora descrito — "teria dificuldade em fazer, mas fazia-o" *(entrev. 2, p. 24)* — tendo ilustrado com um exemplo do seu próprio modo de proceder: "pelo menos como maneira de pensar, faço isso muitas vezes; por exemplo, [no caso de] uma função, faço um bonequinho ou [concretizo-a] num pequeno exemplo, e olho para o exemplo e vejo como é que ele funciona" *(entrev. 2, p. 24)*.

Podemos daqui depreender que esta "experimentação", tal como é descrita — concepção de exemplos e seu teste, num processo com analogias com o processo experimental em outros campos científicos — é praticada em Matemática: a convergência de resultados em diferentes experiências, sugere a existência de uma regularidade ou lei, "uma lógica", como foi referido, e a correspondente formulação de uma conjectura, subsequentemente sujeita ao trabalho de prova.

Percebe-se também a menção ao computador e ao seu papel no trabalho matemático, onde terá vindo facilitar, ou mesmo tornar possível, certas experiências. Em relação ao teorema mencionado e à sua demonstração por via computacional, Manuel Nunes, como já foi anteriormente salientado, manifestou uma posição clara de aceitação, considerando que, no caso em questão, o computador realizou a exaustão necessária a essa demonstração, ultrapassando assim a incapacidade humana de o fazer em tempo útil. Em seu entender, esta situação não traz qualquer inconveniente, tendo mesmo minimizado a possibilidade de erros. A máquina, como fez notar, "só erra, se o indivíduo que a programou errar":

"Isso é a minha opinião. Que a máquina... será difícil encontrar os casos em que a máquina [erra]... Eu não conheço nenhum. Em tantos anos de experiência pessoal, quando aquilo não dá o que a gente espera, a pessoa pensa que a máquina está estragada. Quantas vezes a gente já pensou que está? Ah! Isto teve um *bug* qualquer. Mas não, o *bug* é nosso, não é? Bom, a menos de problemas, mas que aqui nesse caso

> concreto não se põem. A menos de problemas de... de ordem numérica, não é? De aproximação numérica."
>
> *(entrev. 2, p. 16).*

Manuel Nunes estendeu a penetração do computador a várias áreas da Matemática, na Álgebra e na Matemática simbólica, destacando o campo das aplicações matemáticas, domínio onde considerou que o progresso computacional foi "determinante" *(entrev. 1, p. 20)*. Em sua opinião, este progresso estimulou o desenvolvimento teórico e tem consequências profundas na investigação matemática, introduzindo não só diferenças quantitativas, com a possibilidade de resolução de problemas mais complexos e de forma mais rápida, mas também diferenças qualitativas no tipo de problemas e formas de trabalhar. A este propósito, disse:

> "Em última análise [o impacto dos computadores] traduz-se também em diferenças qualitativas. Começa por ser efectivamente apenas uma questão de potência, mas eu acho que em última análise acaba por ter resultados qualitativos. Não apenas na Matemática, na vida vemos que os computadores e as máquinas, cada vez mais potentes, impõem-nos outro ritmo, não é (...). Na verdade estimulam-nos o nosso cérebro, e felizmente o nosso cérebro, no geral, traz qualidade."
>
> *(entrev. 1, pp. 20-21)*

O trabalho dos matemáticos. Posto perante a questão de existirem diferenças significativas no modo de trabalhar dos matemáticos, Manuel Nunes demorou um pouco a responder e mostrou alguma hesitação. "Tenho dificuldades em dizer que sim ou não" *(entrev. 1, p. 18)*, declarou, justificando estas dificuldades pelo facto de as diferenças na forma de trabalhar, ainda que em áreas diversas, serem frequentemente mais aparentes que reais. No entanto, tendo-lhe pedido que fizesse a comparação entre o trabalho de hoje e o dos matemáticos de há uns anos, considerou existirem muitas mudanças, particularmente no tipo de tecnologia disponível, entre as quais destacou a utilização do computador como a mais importante. A diferença, disse, está em que no passado, "o matemático trabalhava com papel e lápis" enquanto que, actualmente, "trabalha com papel, lápis e computador", acrescentando que "mesmo o matemático mais tradicional que a gente possa imaginar, mesmo esse... está um pouco condenado a mudar as suas formas [de trabalho]" *(entrev. 1, p. 19)*.

Procurando aprofundar um pouco a questão das diferenças na forma de trabalhar entre os matemáticos, pedi a Manuel Nunes, já na segunda entrevista, que indicasse alguns elementos que considerasse mais relevantes para distinguir, um investigador em Matemática pura, de um investigador em Matemática aplicada. Após uma pausa demorada (8 s), a sua resposta foi neste termos:

> "O tipo de raciocínio lógico desenvolvido. Parece-me que é... (pausa, 6 s), é de natureza diferente. A tendência do matemático, digamos puro, será desenvolver um processo de raciocínio do tipo dedutivo, fortemente, na minha opinião... com maior peso, não é?... (pausa, 6 s) O outro matemático, digamos que tenta... (pausa, 6 s), anda mais perto do engenheiro."
>
> *(entrev. 2, p. 12)*

A distinção efectuada parece assim situar-se, essencialmente, na maior importância que a dedução terá no trabalho do matemático puro, em relação ao do matemático aplicado. Para esta distinção, Manuel Nunes ainda acrescentou que o matemático puro, para avaliar o sucesso de seu trabalho, se socorre de critérios que visam " dar consistência ao conhecimento criado" *(entrev. 2, p. 14)*, e que os critérios que o matemático aplicado usa, são essencialmente critérios de "aplicabilidade", para averiguar a "capacidade de, com aquele instrumento que ele desenvolveu, abordar problemas reais" *(entrev. 2, p. 14)*.

Nesta comparação entre matemáticos puros e matemáticos aplicados, Manuel Nunes, embora alertando para uma eventual parcialidade da sua parte, manifestou ainda a opinião de que os primeiros têm mais dificuldade em publicar os seus trabalhos científicos, e justificou esta sua posição, precisamente pelas referidas exigências de carácter lógico que lhe são colocadas.

Ainda a propósito da forma de trabalhar dos matemáticos, a certa altura da primeira entrevista, foi pedida uma reacção às ideias de um matemático conhecido, constantes numa citação que lhe apresentei, onde, nomeadamente, se afirmava que o trabalho em equipa é "bastante raro" em Matemática e que os matemáticos, para a reflexão que desenvolvem, precisam de "silêncio e solidão"[5]. Manuel Nunes começou por manifestar alguma concordância com o que era afirmado: "é, é um pouco verdade"*(entrev. 1, p. 22)*. Ele próprio, como disse,

[5] Dieudonné (1990a, p. 24), anexo 2, episódio 1.

tem uma equipa, mas hesita em reconhecer que o produto final do trabalho possa ser visto como um trabalho de equipa. Referindo-se à publicação de artigos científicos, fez notar que não se encontram exemplos com um número grande de autores e que, mesmo quando correspondem a duas ou três pessoas, em geral, a cada uma coube uma parte do trabalho, embora, como sublinhou, exista naturalmente interacção entre os autores. "A verdade é que os três discutiram", disse, acrescentando no entanto que "a parte de reflexão mais dura, se calhar na maior parte dos casos, foi feita em solidão" *(entrev. 1, p. 22)*. Reconheceu contudo que também se poderá ver aqui algum tipo de trabalho em equipa que, reflectindo sobre a sua experiência, descreveu assim:

> "Discutimos a ideia em geral, falamos quando estamos a pensar no tal modelo, isto podia ser um modelo assim, podia ser um modelo assado, podia não sei quantos e tal. Depois fulano A, B ou C fica de abordar este aspecto e vai pensar e depois traz e expõe aos outros o que pensou. E os outros pensam, discutem. Há aqui um misto de... há uns traços de trabalho de equipa, mas ainda há talvez uma... uma componente muito forte de trabalho em solidão."
>
> *(entrev. 1, p. 22)*

Por esta razão, acabou por manifestar a opinião de que os trabalhos de cooperação em Matemática estão a surgir cada vez com mais frequência:

> "Eu penso que [os trabalhos conjuntos] cada vez são mais... mais frequentes. Agora... ainda têm uma componente muito forte de solidão, de esforço individual. (...) Eu acho que há trabalho de equipa [em Matemática], vendo bem acho que é trabalho de equipa. Mas, quer dizer, pode-se imaginar dois ou três químicos, noite e dia, a fazer uma experiência. Não vejo dois ou três matemáticos discutindo o assunto, às vezes até podem discutir, nalguns casos, mas, em geral, o que eu imagino é discutir muito sobre o problema e depois cada um... O químico não, vai ver se vai fazer aquela parte da experimentação e outro vai fazer a outra, e depois volta-se a juntar. O matemático ainda faz um bocado isso. Eu vou olhar para isso melhor, tu olhas para aquilo. Mas há, há de facto... aliás seria uma injustiça dizer o contrário. Há um intercâmbio científico muito mais intenso, as pessoas visitarem-se, é muito mais intenso, isso também tem efeitos extremamente positivos. Era muito injusto, de facto é verdade."
>
> *(entrev. 1, p. 23)*

Falando sobre os momentos criativos na sua actividade como matemático, Manuel Nunes considerou-os como os momentos mais motivantes e de grande gratificação no seu trabalho. "São os momentos mais agradáveis", disse, de "prazer mais elevado", explicando que isso acontecia por serem situações que correspondem a um grande envolvimento e implicação pessoal, onde, "há qualquer coisa mais do próprio" e se manifesta a "vaidade" *(entrev. 1, p. 27)* que, como referiu, existe em todos nós. Esse prazer, explicou ainda Manuel Nunes, "é o mesmo tipo, não em intensidade, mas o mesmo tipo de prazer que se tem quando estamos a ver o que alguém fez e percebemos" *(entrev. 1, p. 27)*.

Sobre os momentos não criativos da prática do matemático, Manuel Nunes, tendo em mente o seu caso, mencionou a importância da revisão de literatura e no que chamou "experimentação matemática" ou "a parte mais empírica, experimental" *(entrev. 1, p. 28)* do seu trabalho. Explicou que esta parte o ocupa muito e que, no seu caso, consiste em "pôr os algoritmos a funcionar e ver o que é que dá" *(entrev. 1, p. 28)*. Como esclareceu, é esta experimentação que testa os algoritmos e permite tirar conclusões de carácter empírico:

> "É a experimentação que determina, que nos diz, com todas as limitações que a experimentação tem neste campo. O que é que é a experimentação matemática neste campo? É testar o comportamento, neste caso do nosso algoritmo para diferentes instâncias do problema em estudo (...). É sempre limitada, porque a gente não consegue gerar, embora se tente fazer isso de uma forma aleatória, mas não conseguimos gerar todos os tipos de ocorrência. Nunca temos a garantia de os termos gerado. Mas pronto, assume-se que no fim deste tipo de experimentação se pode, mais ou menos, estar tranquilo relativamente a esta ou aquela conclusão."
>
> *(entrev. 1, pp. 28-29)*

O ensino da Matemática

Manuel Nunes, quando procurou explicar a origem do seu gosto pela Matemática, situou-a nos primeiros anos de escolaridade, tendo valorizado muito os contactos iniciais com a disciplina e o papel do professor na relação que o aluno com ela estabelece. Daí ter discordado de uma concepção muito corrente, mesmo entre os próprios alunos, de que há pessoas que não têm jeito ou, para usar palavras suas, que 'não dão' para a Matemática. "Depende muito de quem nos ensina os primeiros passos" *(entrev. 1, p. 3)*, disse, para transmitir a sua ideia de que a relação do aluno com a Matemática é muito marcada pela fase inicial da sua aprendizagem e pela forma como o professor a conduz.

No seu percurso escolar, este matemático referiu-se a vários professores em diferentes níveis de escolaridade, evocando algumas experiências positivas e outras negativas. Em seu entender, foram estas experiências positivas que mais se enraizaram e mais o marcaram, estando na origem da sua boa relação com a Matemática. Na Universidade, essa boa relação aprofundou-se para o que terá sido decisivo o facto de, como sublinhou, ter tido sempre bons professores.

Ensino superior. Referindo-se à transição do ensino secundário para o ensino superior, Manuel Nunes, como vimos, considerou que embora tivesse notado diferenças no que diz respeito à Matemática, essa transição decorreu com naturalidade e sem "choques". Mencionou muito de passagem uma ou outra experiência menos boa nos primeiros anos, destacando apenas "um trauma", para usar a sua expressão, que sofreu nas Matemáticas Gerais do 1° ano, e que explicou pela falta de qualidade pedagógica do seu professor, cujas aulas descreveu do seguinte modo:

> "Começava a primeira matéria... (...) [com] o quadro já escrito, a sala cheia. Dava a aula toda com o ponteiro, sentado numa cadeira, com tudo [já] escrito. Aquilo era traumatizante. Olhava para a sala cheia, uns tantos em pé, em cima uns dos outros, e dizia assim para a gente: 'não tenham problema, lá para Janeiro já há espaço para todos'. O que é que ele queria dizer com isso? No final de Dezembro havia uma frequência que era eliminatória [e] quem tivesse menos de quatro perdia imediatamente o ano. Devo-lhe dizer que nesse ano mais de 60% ficou logo aí. Era um gozo particular [desse professor]. [É] a tal ideia de fazer a Matemática um papão, uma coisa esmagadora."
>
> *(entrev. 1, p. 7)*

Recordou com muito gosto o professor que se seguiu na mesma cadeira — "depois foi uma coisa linda", "um período brilhante" *(entrev. 1, p. 7)* — e a nota excelente que veio a conseguir, graças à possibilidade que teve de um trabalho continuado, por ter ficado retido em casa com um pé engessado. Pôde assim, como contou, 'treinar' muitos exercícios, de todos os tipos, não vindo por isso a ter qualquer dificuldade no exame que se seguiu. Sublinhe-se, no entanto, que Manuel Nunes, ao relatar este episódio, reconheceu esta forma de proceder e a aprendizagem que lhe está associada, como sendo o lado problemático do tipo de ensino da época:

> "A minha preparação notável para tirar 18, foi fazer '500 mil' exercícios de Matemática todos iguais. Números complexos e limites, era a matéria que vinha [para o exame]. Limites, todos os '30 mil'... Aquela coisa que, olhando bem, era horrível... com aqueles truques baratos. Não passam disso, são truques baratos. Como fiz os '500 mil' quando cheguei ao exame, qualquer um que ele me apresentava já tinha feito, daí apanhar a nota que apanhei. Os outros desgraçados que não tinham feito esses exercícios todos, de trás para a frente e de frente para trás (riu-se), chumbavam. Aí a imagem é a pior de todas."
>
> *(entrev. 1, p. 7)*

Relativamente às aulas que lecciona como docente de uma instituição de ensino superior, Manuel Nunes, a propósito da forma como se apercebe se determinado aluno, é um bom aluno, referiu-se-lhes do seguinte modo:

> "Eu nas aulas exploro muito o sentido intuitivo... só me preocupo com demonstrações que tenham algum interesse pedagógico. Ou, então, que ilustram um procedimento técnico que se vai usar noutras ocasiões, ou que podem conduzir a um enriquecimento da capacidade de raciocínio. Normalmente sou pouco adepto das demonstrações extremamente elaboradas ao nível da licenciatura, porque não corresponde... para o indivíduo não passa de (...) um mero artifício."
>
> *(entrev. 2, p. 36)*

Numa outra altura da entrevista, quando se pronunciava sobre a existência de eventuais diferenças entre as diversas ciências e a Matemática, Manuel Nunes manifestou a mesma ideia relativa ao lugar e papel das demonstrações no ensino que transparece nas palavras agora transcritas. "Na fase de ensino", disse então o matemático, "muitas vezes a demonstração não tem o mínimo interesse [para o estudante]", ou, como acrescentou, "não tem ganhos nenhuns para o conhecimento do indivíduo"*(entrev. 2, p. 25)*, esclarecendo que isto sucede porque o aluno não está ainda suficientemente maduro. Nestas situações, em sua opinião, justifica-se mais uma abordagem intuitiva. Noutras situações, considera que a demonstração é importante "porque educa um certo esquema de raciocínio" *(entrev. 2, p. 25-26)*.

Por esta razão, Manuel Nunes manifestou a opinião de que o ensino praticado deve estar de acordo com o grau de desenvolvimento mental de cada aluno. A este respeito, fez notar as dificuldades de gestão que a concretização desta intenção implica em turmas com muitos alunos: "com uma turma de trinta, como é que é? [Qual é] o que está ao mais alto nível? [Qual é] o que está ao mais baixo nível? (...) É difícil de gerir" *(entrev. 2, p. 36)*.

Falando ainda sobre as suas aulas, e igualmente a propósito dos bons alunos, Manuel Nunes aludiu também ao gosto que tem em propor exemplos "em que algo falha" *(entrev. 2, p. 37)*. Perante esses exemplos, como explicou, as respostas que mais lhe agradam não são necessariamente as mais imediatas, que vão directas à solução sem explicações por parte do aluno; mas as que fazem sentido e em que são apresentadas razões para a justificação da resposta dada. Nas aulas teóricas, é nesta interacção que se apercebe quem são os melhores alunos; nas aulas práticas, como esclareceu, essa percepção é mais fácil, devido à maior proximidade com o trabalho que os alunos aí realizam.

Manuel Nunes considerou a actividade de ensino "estimulante", "extremamente agradável" *(entrev. 2, p. 2)* e capaz de proporcionar momentos de gratificação profissional. No entanto, como fez questão de dizer, as condições difíceis em que muitas vezes se exerce, nomeadamente, no que diz respeito à instalações, bem como ao número de alunos das turmas e à sua falta de motivação, restringem muito essa possibilidade. Como explicou, pessoalmente não vive muito essas dificuldades, pois, nos últimos anos, tem sobretudo tido a seu cargo a orientação científica de teses de mestrado e de doutoramento.

Convidado a pronunciar-se sobre o modo como vê a relação entre a investigação e o ensino, Manuel Nunes considerou que estas duas actividades têm fortes e íntimas relações, e que, em sua opinião, deveriam estar sempre associadas no professor universitário. Segundo as suas palavras "dificilmente se ensinará bem uma coisa... algo [de] que não tenhamos uma visão mais geral" *(entrev. 2, p. 38)* e, na Universidade, isto, em seu entender, pode ser proporcionado pela investigação científica. Do ensino superior, considerou ainda Manuel Nunes, espera-se que abra perspectivas aos seus alunos, que lhes proporcione uma "mente mais aberta" e, para este matemático, "será difícil ao docente universitário contribuir para isso se ele próprio não tiver uma actividade de investigação associada"*(entrev. 2, p. 39)*.

Manuel Nunes sublinhou o facto de a Universidade ser um lugar onde se produz conhecimento e, por isso, é-lhe "difícil imaginar o docente universitário dissociado do investigador" *(entrev. 2, p. 39)*. Por outro lado, considerou que a docência também influencia a actividade de investigação, "uma influência indirecta" que explicou em termos de poder proporcionar o "equilíbrio" ou a "disciplina mental" que a "comunicação" no ensino impõe e que, no seu entendimento, são necessários ao investigador. Daí a razão da sua afirmação: "as actividades de transmissão de conhecimentos a diferentes níveis... eu tentaria impô-la sempre a um investigador" *(entrev. 2, p. 40)*.

No que diz respeito à formação de professores, Manuel Nunes manifestou uma posição crítica em relação à situação actual e reconheceu que as instituições de formação, nomeadamente as universidades, têm também responsabilidade nisso e que alguma coisa deve mudar ao nível do ensino superior. Sobre esta questão, levantou algumas reservas ao modelo de formação que se está a praticar em algumas instituições, onde se procura, em sua opinião, "um compromisso entre a formação científica e a formação pedagógica" que, como sublinhou, no espaço de cinco anos que dispõem, "não satisfaz nem uma nem outra" *(entrev. 2, p. 47)*. Do seu ponto de vista, devia existir mais tempo para mais formação científica e mais formação pedagógica. A primeira localizava-a essencialmente, mas não exclusivamente, na parte inicial da formação, tornando a licenciatura de índole fundamentalmente científica, e a segunda, ao nível da pós-graduação, de carácter exclusivamente pedagógico.

Referindo-se especificamente à formação científica, Manuel Nunes considera que é nesta área onde existem "as maiores debilidades" *(entrev. 2, p. 40)*, tanto nas licenciaturas de ensino como nas outras, e que o insucesso pedagógico que se verifica nas disciplinas matemáticas é um indicador de que alguma alteração ao nível interno dessas disciplinas deverá ser equacionada.

Ensino secundário. Na parte final da última entrevista, quando se abordou a questão de muitas vezes se ouvir dizer que os alunos entram no ensino superior com grandes dificuldades a Matemática, Manuel Nunes manifestou também a mesma opinião, tendo enumerado dois pontos fracos principais nesses alunos.

Por um lado, "pouco amadurecimento dos conceitos matemáticos", e por outro, lado "poucos hábitos de trabalho" *(entrev. 2, p. 43)*. Em sua opinião, é transmitida demasiada informação aos alunos nesse nível de ensino, e essa informação é "pouco trabalhada" *(entrev. 2, p. 43)*, o que estará na origem da sua pouca maturidade matemática.

Como explicação para estas debilidades nos alunos, Manuel Nunes aponta a "má preparação dos professores" e as "más condições de funcionamento da escola", que exemplificou com os problemas de "desorganização" que existem, de "condições" e de "horários", e do próprio ambiente de "violência" por vezes existente *(entrev. 2, pp. 44-45)*. Reconhecendo que poderão existir outras explicações, a sua experiência pessoal, como afirmou, dita-lhe estas, sublinhando que no ensino secundário há ainda situações frequentes em que o professor de Matemática não tem a formação e a experiência adequadas. "Um jovem", disse, "raramente tem um professor de origem matemática e quando tem, não é da melhor qualidade" *(entrev. 2, p. 44)*. A este propósito, Manuel Nunes valorizou os anos de prática de ensino do professor e sublinhou a necessidade de uma boa preparação científica que os cursos de onde muitos professores provêm não podem proporcionar. Como sugestões para melhorar a situação, propõe mais investimento na melhoria da qualidade dos professores — "talvez seja o grande passo [a dar]" *(entrev. 2, p. 46)* — e das condições de trabalho nas escolas.

Posto perante a questão sobre se, numa aula, o aluno presente poderá ser visto como um matemático, Manuel Nunes preferiu considerá-lo antes "um aprendiz de Matemática" *(entrev. 2, p. 41)*. No seu entender, falta ao aluno "autonomia" para se poder dizer que está a fazer Matemática, embora, como chamou a atenção, seja "difícil de definir o dia e a hora em que essa autonomia é atingida" *(entrev. 2, p. 41)*. Para além disso, é de opinião que as actividades que os alunos realizam em aula, ainda que de carácter matemático, são actividades ao "nível da iniciação" ou mesmo de "pré-iniciação" *(entrev. 2, p. 42)* matemática.

Sobre a mesma questão, agora referida ao professor de Matemática do ensino secundário, Manuel Nunes, embora com bastante hesitação e deixando transparecer algumas dúvidas, pareceu, desta vez, inclinar-se para uma resposta afirmativa. Não explicou muito a sua opinião, justificando-a apenas com o facto de que o professor, embora não produzindo Matemática, "lida com conceitos" *(entrev. 2, p. 42)* e procura transmiti-los a outros.

Discussão

A escolha da Matemática e da profissão

Os dois matemáticos participantes neste estudo, Manuel Silva e Manuel Nunes, são professores do Departamento de Matemática na mesma universidade em Lisboa, este último desenvolvendo o seu trabalho numa área da Matemática aplicada, e o primeiro num domínio mais próximo do que habitualmente se chama Matemática pura, embora também relacionado com as aplicações da Matemática. Possuem ambos uma larga experiência como docentes e investigadores, tendo desempenhado, ao longo dos anos, diversos cargos e funções enquanto membros do Departamento da Faculdade a que pertencem.

Quer Manuel Silva, quer Manuel Nunes, vieram a eleger a Matemática como o campo científico onde exercem a sua profissão, mas um e outro tiveram interesses mais precoces por outras disciplinas ou domínios da actividade científica que não a Matemática. Manuel Silva, como vimos, chegado aos anos terminais do Liceu, estava mais inclinado para uma licenciatura em Física, mas, por conselho de um professor, decidiu ingressar num curso de Matemática. Manuel Nunes, por sua vez, interessou-se primeiro por um curso de Engenharia que chegou a frequentar, e só depois mudou para a licenciatura em Matemática. Recordo que a opção de Manuel Nunes por esta licenciatura, foi tomada sem que tivesse em vista o exercício de qualquer profissão, nem mesmo, como salientou, o ensino, na altura o horizonte profissional mais provável desse curso. Foi, como explicou, uma escolha orientada apenas pelo gosto que sentia pela Matemática, pela possibilidade de estudar aquilo que lhe dava prazer. Manuel Silva, pelo seu lado, pensando concluir um curso de Física, iniciou os seus estudos superiores em Matemática e esta opção fez aumentar o seu interesse por esta ciência, levando-o a escolhê-la em definitivo como campo para o seu trabalho profissional.

Num caso e noutro, importa dizer, a escolha final pela Matemática, no entanto, foi permeada pelas preferências ou propensões mais antigas de cada um dos matemáticos. Manuel Nunes, que frequentara inicialmente um curso de Engenharia, portanto um curso voltado para aspectos práticos da actividade humana, com o sentido de resolução de problemas reais e concretos, vem a seguir uma carreira académica em Matemática mas, repare-se, optando pela Matemática aplicada, por uma Matemática, como ele disse, também ela orientada para a "resolução de problemas da vida corrente". Manuel Nunes, lembro, justificou a sua preferência por esta Matemática, pela gratificação que tem com a aplicabilidade prática dos estudos que realiza.

Manuel Silva não seguiu o percurso que mais o atraía no final dos seus estudos liceais. A sua escolha pela Matemática foi uma escolha aconselhada, com a intenção de ingressar, posteriormente, num curso de Física. No entanto, uma vez na licenciatura de Matemática, o seu interesse por esta disciplina aumentou e não regressou à Física. Atente-se, todavia, como ele próprio fez questão de salientar, que mantém ainda interesses por aspectos desta ciência e o seu trabalho de investigação matemática tem relações importantes com resultados e problemas da Física. E, recordo ainda a propósito, embora nos anos iniciais da licenciatura se sentisse sobretudo atraído pelos aspectos mais "herméticos" e "abstractos" da Matemática, no fim do curso voltou a interessar-se pelos aspectos mais aplicados desta ciência.

Relativamente ao percurso escolar pré-universitário, os dois matemáticos, pelo que deram a entender, tiveram globalmente uma experiência positiva com a Matemática. Manuel Silva só evocou boas memórias, e lembrou ter tido sempre uma boa relação com a Matemática, para o que terá contado, como fez notar, os bons professores que teve e um ambiente familiar muito propício a esta disciplina. Manuel Nunes, por sua vez, mencionou também o gosto pela Matemática, cuja origem fez remontar aos primeiros anos de escolaridade, evocando a experiência proporcionada por um professor que valorizava a descoberta, os aspectos experimentais da Matemática e actividades que criavam desafios aos alunos. Esta experiência terá constituído um contributo indelével na relação de Manuel Nunes com a Matemática e, talvez por esta razão, este matemático deu grande importância ao que chamou "o primeiro encontro com a Matemática" que considerou poder ser decisivo na evolução da aprendizagem do aluno e do modo como ele se relaciona com a disciplina.

No percurso universitário, a boa relação com a Matemática que Manuel Silva e Manuel Nunes traziam dos anos anteriores não só se manteve, como se aprofundou, e, também neste nível de ensino, os dois matemáticos associaram aos bons professores que tiveram, o progresso no gosto e interesse pela Matemática. Importa no entanto referir que, na transição para o ensino superior, ambos sentiram diferenças, sobretudo nos primeiros anos, confrontando-os com a experiência vivida no ensino secundário. Manuel Nunes, não foi muito específico e não valorizou muito as diferenças, considerando que não provocaram, "choques" e que ocorreram num processo de "evolução natural". Manuel Silva, no entanto, mencionou algumas dificuldades de adaptação que associou ao carácter mais abstracto da Matemática do ensino superior e à maior necessidade de trabalho individual. Todavia, o seu gosto e interesse por esta ciência foi, como vimos, aumentando de ano para ano, e Manuel Silva veio mesmo a optar definitivamente por uma carreira profissional em Matemática.

Manuel Silva e Manuel Nunes são dois matemáticos que se sentem confortáveis com a profissão que exercem, particularmente no que concerne à sua componente de investigação, aparentando um nível de auto-realização elevado. Na verdade, um e outro retiram as suas compensações e gratificações profissionais sobretudo na actividade de investigação matemática que realizam. Manuel Nunes reconhece que a actividade de docência pode ser gratificante mas é muito prejudicada pelas condições em que em geral se exerce, particularmente nos primeiros anos da licenciatura. A investigação que realiza, a liberdade que reconheceu ter nesta actividade, bem como a possibilidade de conciliar a investigação fundamental com as suas aplicações, de ver a aplicação do seu trabalho de investigação, são, recordo, as principais compensações que Manuel Nunes retira do seu trabalho profissional. Também Manuel Silva vê na investigação e na possibilidade de poder contribuir para o acréscimo do conhecimento na área em que trabalha, a grande compensação da profissão que exerce. No que diz respeito à docência, manifestou uma posição semelhante à de Manuel Nunes, deixando transparecer que não retira grandes compensações desta actividade, embora tenha reconhecido a importância de combinar as actividades de investigação e de docência no ensino superior.

A Matemática e a actividade matemática

Manuel Silva e Manuel Nunes trabalham em domínios matemáticos distintos, mas relacionados com as aplicações da Matemática, tendo mesmo o segundo inserido a sua área de trabalho na Matemática aplicada. Todavia, para explicar o gosto que cedo sentiram pela Matemática, e que se foi acentuando e cimentando ao longo da escolaridade liceal e universitária, os dois matemáticos, nos argumentos que utilizaram, referiram-se a atributos de natureza estética que reconhecem na Matemática e no trabalho que com ela desenvolvem. Manuel Silva mencionou a "perfeição" e a "arquitectura" dos resultados matemáticos como fonte de satisfação pessoal e, para explicar a associação que fez da Matemática com a Arte, referiu-se ao "equilíbrio" desses resultados e à sua "unidade", bem como à "beleza" que lhes reconhece quando resolvem um problema em aberto. A propósito desta associação, lembro também, Manuel Silva aludiu ao "prazer" proporcionado pela realização de trabalho matemático correcto e com "coerência interna". Manuel Nunes, por sua vez, mencionou a "elegância" dos raciocínios em Matemática, termo que, a propósito de outra questão, voltou a invocar associando-o a "harmonia" e considerando-o como aquele que "melhor traduz a beleza matemática".

Na explicação das razões do seu gosto pela Matemática, Manuel Nunes mencionou ainda a sua atracção, enquanto aluno, pela "forma lógica e segura" de como se progredia nos raciocínios matemáticos: sem "saltos no escuro", como também explicou. E, Manuel Silva referiu-se também à satisfação que a investigação em Matemática lhe proporciona, por sentir que, mesmo perante "um edifício relativamente completo", pode contribuir para o seu desenvolvimento. Têm este sentido, as afirmações que aplicou a um investigador matemático: "há sempre Matemática ao alcance da pessoa" e "pode sempre fazer Matemática interessante".

A Matemática e a realidade, a Matemática e as outras ciências. Quando se produz ou utiliza conhecimento matemático para o estudo e compreensão de fenómenos da realidade natural, ou para responder a questões e problemas colocados pelas outras ciências ou pelas diversas áreas da actividade humana é corrente falar-se em aplicações da Matemática ou em Matemática aplicada. Matemática pura e Matemática aplicada são, reconhecidamente, expressões correntes no vocabulário da comunidade matemática. A primeira é associada à investigação fundamental desenvolvida sem quaisquer propósitos ou motivações exteriores à Matemática, podendo assim ser considerada uma espécie de 'Matemática pela Matemática'. A segunda, pelo contrário, é associada à investigação motivada pelos problemas colocados por outras áreas científicas ou domínios da actividade humana e orientada para a sua resolução. No caso dos matemáticos deste estudo, todavia, esta distinção foi considerada irrelevante e mesmo recusada. Para Manuel Silva só há uma Matemática e não parece fazer muito sentido a dicotomia Matemática aplicada—Matemática pura. Manuel Nunes, pelo seu lado, considerou a dicotomia em questão como uma "falsa divisão" que apenas permanece por razões de carácter histórico e institucional.

Pronunciando-se sobre as relações da Matemática com a realidade, Manuel Silva começou por considerar que a Matemática nasceu para resolver problemas que a realidade colocava ao homem da Antiguidade, e que só muito mais tarde se autonomizou como ciência. Do seu ponto de vista, a relação da Matemática com a realidade é feita, precisamente, através dos mais diversos problemas que esta coloca ao homem e da sua resolução. Manuel Silva considera que essa relação se mantém nos dias de hoje, e concebe-a como uma interacção entre a Matemática e a realidade, em que esta surge, simultaneamente, como fonte de inspiração para o desenvolvimento do conhecimento matemático e como seu domínio de aplicação. Muito embora, acrescente-se, este matemático tenha sublinhado que a Matemática, podendo ou não existir alguma motivação 'exterior', também se desenvolve autonomamente, seguindo uma lógica interna. Isto é, que há conhecimentos matemáticos produzidos independentemente de qualquer relação com domínios não matemáticos, e sem que se tenha em vista qualquer tipo de aplicação fora da Matemática. É o que Manuel da Silva chamou de desenvolvimento "endógeno" da Matemática, ressalvando que mesmo do conhecimento assim produzido, podem sempre surgir aplicações. Todavia, mesmo no caso em que os trabalhos matemáticos em desenvolvimento não têm qualquer objectivo de aplicação, Manuel Silva considerou que é corrente existirem interacções "inesperadas" com a realidade que sugerem ideias e tipos de raciocínio que influenciam o trabalho criativo do matemático, e que muitas vezes possibilitam a resolução do problema que ele tinha em mãos.

Ambos os matemáticos destacaram a grande e crescente aplicação dos resultados matemáticos nas diversas áreas da actividade humana. Para Manuel Nunes é muito difícil negar, em absoluto, a aplicabilidade da Matemática, mesmo pensando nas áreas mais abstractas. Além disso, demarcou-se de perspectivas que desvalorizam os aspectos aplicados da Matemática e das que a encaram como um domínio isolado que se desenvolve sem qualquer relação com a realidade ou outros domínios científicos. Recordo que, a este propósito, Manuel Nunes salientou o facto de que a utilização do conhecimento matemático por outras ciências e em outros domínios tem provocado, reciprocamente, o enriquecimento da própria Matemática.

Manuel Nunes considerou a Matemática um "instrumento imprescindível" das outras ciências que, matematizando-se, progridem no seu próprio campo numa perspectiva não exclusivamente empírica. Na sua visão, o contributo da Matemática não se reduz, como muitas vezes é sustentado, a "pôr ordem e rigor" nas ciências que a ela recorrem, mas consiste, acima de tudo, em fornecer modelos para o estudo dos fenómenos nessas ciências, favorecendo deste modo o progresso do conhecimento científico e a compreensão a realidade. Por outro lado, como fez notar, os modelos matemáticos são sempre "aproximações" da realidade, do fenómeno ou da situação em estudo, e a sua utilização pelas diversas ciências, reciprocamente, permite o seu aperfeiçoamento, possibilitando portanto, também, o desenvolvimento do conhecimento matemático.

A verdade, o rigor, a demonstração em Matemática. Ambos os matemáticos consideraram a formulação de um teorema (da sua conjectura) como correspondendo a uma situação de descoberta. "De facto ele estava lá", disse Manuel Nunes a propósito de um teorema, e, para Manuel Silva, se é possível demonstrar um teorema, é porque ele "existia" antes da demonstração que apenas vem provar que ele é verdadeiro. A verdade matemática, também para os dois matemáticos, é relativizada ao quadro axiomático utilizado, evidenciando-se em ambos a ideia de que, se há partes em Matemática em que os resultados se podem considerar definitivamente estabelecidos, outras há em que é muito difícil fazer tal juízo.

Já no que se refere à ideia de rigor, as posições dos dois matemáticos não foram coincidentes. Manuel Silva anuiu à ideia de que, em Matemática, o rigor absoluto foi atingido, considerando que a linguagem matemática está "estabelecida" e que a este respeito "não é possível mais" do que já foi conseguido. Manuel Nunes, por sua vez, recusou tal ideia, manifestando reservas face a afirmações de carácter absoluto como estas, ainda que aplicadas à Matemática. Reconhecendo que muito do conhecimento matemático é seguro, rigoroso e estável, este matemático chamou a atenção que há zonas em Matemática em tal não acontece, em especial tratando-se de zonas em desenvolvimento. Recusou, assim, para a Matemática, uma perspectiva que a vê completa e perfeitamente estabelecida, preferindo concebê-la como "um edifício em construção" em que nem tudo está terminado ou completamente definido.

Para caracterizar uma actividade como actividade matemática, Manuel Silva recorreu às ideias de demonstração e de rigor, considerando o método demonstrativo como o método da Matemática. Além disso, distinguiu a Matemática das outras ciências, caracterizando-a como uma ciência dedutiva, "completamente exacta", querendo com isto dizer que em Matemática não há lugar para a "especulação" ou para a "subjectividade": o que é exposto num trabalho "ou está certo, ou está errado". Para este matemático, Matemática e demonstração são indissociáveis e de algum modo quase 'sinónimos' (lembro a alusão de Manuel Silva à afirmação: "quem diz Matemática, diz demonstração"). Pela demonstração, em seu entender, é possível obter a certeza da verdade de um resultado, pois seu o carácter é eminentemente lógico, "analítico", e só assim é considerada na comunidade matemática. Justificando esta posição, Manuel Silva invocou as reservas levantadas relativamente às demonstrações computacionais que também pareceu subscrever. A este propósito, como vimos, Manuel Nunes manifestou uma concepção diferente, não questionando a validade das demonstrações feitas por computador.

Assim, no que se refere à actividade matemática, podemos dizer que para Manuel Silva, numa boa medida, 'fazer Matemática' é demonstrar. Manuel Nunes, por sua vez, na caracterização de uma actividade como actividade matemática, incluiu elementos como o trabalho com conceitos, a pesquisa de regularidades e também a demonstração. Todavia, a concepção que a este respeito mais se evidenciou, foi a da actividade matemática como actividade de modelação. Para este matemático 'fazer Matemática' é elaborar modelos matemáticos que descrevem fenómenos ou situações reais e desenvolver técnicas para trabalhar com esses modelos. É o trabalho que Manuel Nunes realiza em Matemática.

O papel dos problemas, o trabalho com os modelos matemáticos. Os problemas e a sua resolução parecem ocupar um lugar de relevo entre as concepções de Manuel Silva sobre a Matemática e a actividade matemática. Recordo, por exemplo, que um bom matemático para Manuel Silva, é aquele que resolve problemas que a comunidade matemática considera interessantes e vimos que o seu trabalho de investigação consiste, justamente, em resolver problemas. Vimos também que Manuel Silva considera que os problemas que a realidade colocava ao homem, e o esforço na sua resolução, estão na origem da Matemática e que é através destes problemas que ela mantém a relação com a realidade. Este tipo de problemas relacionado com as aplicações da Matemática, e a capacidade que a Matemática tem em contribuir para a sua resolução, são mesmo vistos, por este matemático, como muito importantes para a divulgação desta ciência e para mostrar às pessoas em geral a grande relevância da Matemática. A par disto, segundo Manuel Silva, os problemas e a sua resolução introduzem o elemento estético nesta ciência. Em seu entender, a beleza de um resultado matemático reside precisamente no facto de esse resultado resolver, total ou parcialmente, um problema em aberto. É ainda de salientar que para Manuel Silva os problemas e o desafio que constitui a sua resolução são a fonte de estímulo e de gratificação na investigação matemática.

Em Manuel Nunes a questão dos problemas e do seu papel na Matemática não se revestiu de grande visibilidade, embora, pela forma como se referiu à sua prática de investigação, se possa considerar que essa prática consiste na resolução de problemas ou, como ele próprio disse, em "revisitar" problemas já resolvidos com o propósito de resolver novos problemas. Estes problemas, dada a sua área de trabalho, são motivados por questões concretas e, por essa razão, como o matemático sublinhou, a relação entre a investigação que realiza, mesmo apresentando-se muito abstracta, e as suas aplicações é imediata. Desta possibilidade em realizar investigação fundamental que simultaneamente tem grande aplicação prática, Manuel Nunes, como vimos, retira grande motivação e gratificação profissional. Em sua opinião, lembro, todo o matemático tem um "prazer especial" em ver a utilidade prática do trabalho que realiza, mesmo os que dizem desvalorizar essa utilidade.

Manuel Nunes caracterizou o seu trabalho de pesquisa como consistindo na criação e desenvolvimento de modelos matemáticos, bem como a concepção de técnicas para trabalhar com esses modelos. Os modelos matemáticos, como explicou, pretendem responder a questões concretas de uma determinada situação real, constituindo uma representação aproximada dessa realidade. Assim, a Matemática proporciona modelos para situações reais e, por outro lado, a aplicação desses modelos vai permitir a identificação de eventuais deficiências e a possibilidade da sua correcção. Manuel Nunes vê assim, neste tipo de trabalho, uma interacção entre a Matemática e a realidade e as ciências que a estudam. Com a Matemática é possível elaborar modelos que aumentam o nosso conhecimento da realidade. A utilização destes modelos, se por um lado pode revelar as "fraquezas" da Matemática — fraquezas que, segundo Manuel Nunes, muitos matemáticos têm tendência em não reconhecer — possibilita igualmente a melhoria dos modelos utilizados e consequentemente o progresso do conhecimento matemático.

As novas tecnologias e papel da experiência em Matemática. Na distinção entre a Matemática e as outras ciências, no caso, as ciências habitualmente denominadas como ciências experimentais, ambos os matemáticos contrapuseram o carácter dedutivo da Matemática e, portanto, a sua natureza lógica, à natureza empírica dessas ciências. Para Manuel Silva, como vimos, o que principalmente distingue a Matemática das outras ciências, é o facto de ser uma ciência exacta, qualidade que lhe advém do seu carácter dedutivo. Para além disso, a principal diferença que destacou, entre o trabalho dos matemáticos e o dos outros cientistas, reside no facto de estes, na sua pesquisa científica, estarem "extremamente dependentes" das experiências laboratoriais, o que não acontece com os matemáticos. Também Manuel Nunes destacou a mesma distinção entre os dois campos — a Matemática é "mais dedutiva", as outras ciências "mais experimentais" — distinção que situou ao nível das metodologias de produção de conhecimento, considerando não existirem diferenças significativas entre um matemático e um cientista de outro domínio, ao nível da "atitude científica".

Ambos os matemáticos reconhecem as grandes virtualidades que o desenvolvimento das novas tecnologias proporcionaram à investigação matemática, nomeadamente através da utilização dos meios computacionais. Manuel Nunes, por exemplo, salientou a possibilidade da realização de experiências em Matemática que seriam impossíveis sem o actual desenvolvimento dessa tecnologia e Manuel Silva sublinhou as potencialidades heurísticas da utilização do computador. Todavia, este matemático, reconhecendo que esta utilização introduz na Matemática o elemento experimental, teve o cuidado de distinguir experimentação de demonstração. Para Manuel Silva, a demonstração analítica é indispensável para a aceitação de um resultado matemático como verdadeiro, e a utilização de argumentos não analíticos ou as demonstrações computacionais merecem reservas.

Manuel Nunes, como já foi mencionado, encara de outro modo as demonstrações realizadas por computador, não vendo razões para a sua não aceitação. Para além disso, no que diz respeito ao papel da experiência em Matemática, não se identificou com a pouca importância que habitualmente lhe é atribuído. Em seu entender, pratica-se a experimentação em Matemática, e ela é importante no desenvolvimento do conhecimento matemático. Em particular, mencionou o recurso a apoios visuais e o processo de pesquisa de regularidades, conducente à eventual formulação e teste de conjecturas.

Formas de trabalhar dos matemáticos e o papel da comunidade matemática. Sobre a forma como o trabalho de investigação é realizado, quer Manuel Silva, quer Manuel Nunes referiram-se a algumas diferenças entre os matemáticos, o primeiro aludindo sobretudo a aspectos essencialmente de natureza pessoal, e o segundo a aspectos relacionados com o estilo ou propósito com que os matemáticos desenvolvem o seu trabalho. Na verdade Manuel Silva considerou existirem, "mesmo entre grandes matemáticos", diferenças importantes, por exemplo, ao nível da capacidade de progredir nos assuntos em estudo, relacionar esses assuntos e obter uma visão global e profunda e, finalmente, ainda ao nível do que chamou "rapidez" com que isto é conseguido. Um bom matemático, segundo Manuel Silva, para o ser, reúne, para além da capacidade de resolver problemas, qualidades como uma grande imaginação e capacidade de concentração, tendo também incluído a memória como um elemento importante entre essas qualidades.

Manuel Nunes, embora considerando que muitas vezes as distinções na forma de trabalhar dos matemáticos são sobretudo aparentes, acabou por diferenciar o trabalho em Matemática pura do trabalho em Matemática aplicada, considerando que, no primeiro caso, o matemático utiliza tendencialmente o raciocínio dedutivo, adoptando critérios de consistência lógica para validar o seu trabalho. No segundo caso, a abordagem que o matemático faz ao problema que tem em mãos assemelha-se, como explicou, à de um engenheiro, adoptando sobretudo critérios de aplicabilidade para essa validação.

Manuel Silva, no que diz respeito especificamente ao modo como os matemáticos realizam o seu trabalho, não explicitou diferenças importantes. Referiu-se à utilização do computador, em sua opinião, mais frequente e intensa em investigação aplicada, mas que também ocorre na investigação de natureza teórica. Esta foi igualmente a posição de Manuel Nunes que foi ao ponto de considerar que "mesmo o matemático mais tradicional", perante a penetração crescente do computador nas mais diversas áreas matemáticas ver-se-á obrigado a modificar a sua forma de trabalho, significando com isto a necessidade da inclusão das ferramentas computacionais, "para além do papel e lápis", na investigação matemática.

A acrescentar aos aspectos já referidos, relativos à forma de trabalhar dos matemáticos, há a destacar em Manuel Silva a valorização da comunidade matemática e da interacção entre os matemáticos, quer pelo seu papel na escolha dos problemas significativos para a investigação e validação dos resultados matemáticos relevantes, quer como fonte de estímulo e motivação no trabalho do matemático. Em sua opinião, subsiste a necessidade e importância do trabalho individual e da reflexão solitária do matemático. Referiu todavia que, nos dias de hoje, há trabalhos de colaboração em Matemática, em cada vez maior número, podendo muitos deles, como também reconheceu Manuel Nunes, ser considerados autênticos trabalhos de equipa e contribuirem significativamente para progresso do conhecimento matemático.

O ensino da Matemática

Manuel Silva e Manuel Nunes são, na sua profissão, professores e investigadores. Manuel Silva, como vimos, identifica-se mais com o papel de investigador, retirando da investigação grande parte da sua motivação e gratificação profissionais. Enquanto docente, manifestou o gosto de estabelecer uma relação próxima dos alunos, valorizando a discussão, a intervenção e iniciativa dos alunos nas aulas, e disse sentir-se muito desconfortável quando se apercebe que os seus alunos não o estão a acompanhar naquilo que lhes apresenta. Manuel Nunes, pelo seu lado, considerou a actividade docente "estimulante" e gratificante mas, em seu entender, muito prejudicada pelas condições em que frequentemente se exerce. Relativamente à sua prática como professor, disse valorizar as abordagens intuitivas, parecendo mesmo pôr em segundo plano os aspectos lógicos quando se confessou pouco adepto de "demonstrações elaboradas" para alunos de licenciatura, considerando-as artificiosas e com pouco interesse pedagógico. Para além disso, recordo que Manuel Nunes mencionou o facto de gostar de propor exemplos em que "algo falha" e de dar sobretudo importância às respostas dos alunos que fazem sentido e que são justificadas, independentemente de poderem não ser as que, de uma forma mais imediata e directa, respondem ao que foi proposto.

Ambos os matemáticos valorizaram as relações entre a actividade de ensino e a actividade de investigação, todavia de uma forma mais visível e acentuada no caso de Manuel Nunes. Este matemático vê fortes e estreitas relações entre essas actividades e considera que num professor universitário elas devem estar sempre combinadas. Em seu entender, a docência influencia a actividade de investigação, pelas exigências de "disciplina" e de "comunicação" a que obriga, mas o ensino dificilmente será de qualidade se o docente não for também investigador. Manuel Silva, como vimos, também evidenciou de algum modo a importância da coexistência das actividades de investigação e de docência no professor universitário, com a ressalva que esta última deverá ser realizada num regime que não prejudique a primeira.

Nas perspectivas dos matemáticos deste estudo sobre o ensino da Matemática, ressalta a importância que ambos atribuem à figura do professor e ao seu papel na aprendizagem da Matemática e no desenvolvimento de atitudes positivas nos alunos face a esta disciplina. Manuel Silva associou aos professores que teve, a qualidade da sua formação em Matemática e o gosto pela disciplina que foi adquirindo e aprofundando ao longo de toda a escolaridade, desde o ensino liceal até ao ensino superior, reconhecendo mesmo que, a este nível, vieram a influenciar a sua escolha profissional. Também para Manuel Nunes, o estabelecimento e manutenção de uma boa relação dos alunos com a Matemática depende em grande parte do professor, particularmente, pela responsabilidade que lhe atribui em proporcionar experiências positivas aos alunos que são, como sublinhou, um elemento preponderante no desenvolvimento de atitudes favoráveis face à Matemática e no sucesso da aprendizagem. Considerou que as experiências positivas que alguns dos seus professores lhe proporcionaram foram a contribuição mais importante para o enraizamento da boa relação que estabeleceu com a Matemática, relação que, como chamou a atenção, resistiu, mesmo quando, em outras situações, essas experiências foram negativas.

Ainda sobre a questão da importância e do papel do professor, cabe aqui referir que Manuel Nunes foi ao ponto rejeitar a concepção muito divulgada de que há alunos que têm jeito para a Matemática e outros não. Em seu entender o que é mais determinante na evolução da relação e da formação matemática é "o primeiro encontro" do aluno com a disciplina, e depende sobretudo do professor a forma como esse encontro decorre. Cabe ao professor, como explicou, promover nos alunos a compreensão dos conceitos e processos matemáticos que, a não acontecer na fase inicial da aprendizagem, constitui, no seu entendimento, a causa da "rejeição" da Matemática que muitos alunos manifestam, e a origem de uma auto-imagem negativa face a esta disciplina.

Relativamente à visão que têm dos alunos que ingressam no ensino superior, no que se refere à ideia muito divulgada de que esses alunos têm uma preparação deficiente, podemos destacar, de entre as considerações que ambos os matemáticos fizeram a este respeito, aspectos que são também indicadores das suas concepções sobre a Matemática e a actividade matemática. Manuel Silva, por exemplo, caracterizou a má preparação dos alunos focando essencialmente dois aspectos: deficiente preparação ao nível do cálculo e uma visão demasiado abstracta e formal da Matemática. Considerou que os alunos chegam ao ensino superior "mecanizados", sem o que chamou um conhecimento prático sustentado numa boa formação teórica. Para este matemático, recordo, existe no ensino secundário "excessiva abstracção" no trabalho que se realiza com os alunos e pouco investimento nos aspectos de cálculo da Matemática que considerou fundamentais. Da parte de Manuel Nunes, a fraca preparação dos alunos no final do ensino secundário traduz-se essencialmente em deficiências conceptuais e no facto de os alunos não terem hábitos de trabalho. Em seu entender é excessiva a informação que se transmite aos alunos, e essa informação não é elaborada e aprofundada, pelo que "há pouco amadurecimento" dos conceitos matemáticos nos alunos.

Também a forma como os dois matemáticos se pronunciaram sobre a possibilidade do aluno e do professor, no ensino secundário, serem ou não encarados como matemáticos, permite acrescentar mais alguns elementos ao quadro das suas concepções sobre a Matemática e a actividade matemática. Em relação ao aluno, no entendimento de ambos os matemáticos a sua iniciativa na actividade matemática é limitada, bem como o seu grau de autonomia, e, por esta razão, Manuel Silva considera que não faz muito sentido ver o aluno como um matemático. Cabe aqui lembrar que Manuel Silva considerou que as tarefas propostas em aula para poderem serem actividades matemáticas, devem "constituir momentos criativos", tendo referido a propósito, o recurso à resolução de problemas como meio de conseguir momentos dessa natureza. Manuel Nunes, também não aderiu à ideia do aluno como matemático; vimos que, para ele, o aluno é sobretudo "um aprendiz" de Matemática e as actividades que realiza são essencialmente de "iniciação" na disciplina.

Em relação ao professor do ensino secundário, os matemáticos manifestaram-se noutro sentido. Manuel Silva, considerou o professor como um matemático uma vez que "toma iniciativas e propõe problemas", muitas vezes elaborados por ele mesmo, e reconheceu vantagens em o professor se considerar ele próprio como matemático. Em Manuel Nunes evidenciou-se uma posição semelhante, embora justificando-a de modo diferente e parecendo menos seguro dela. Para este matemático, recordo, embora o professor não produza Matemática, pode ser encarado como um matemático uma vez que trabalha com conceitos matemáticos e tem por objectivo a sua transmissão.

VI — As professoras

Maria da Graça

Quer a primeira, quer a segunda entrevista com esta professora, realizaram-se, como tinha sido combinado, na escola onde Maria da Graça lecciona. Para o primeiro encontro, encontrámo-nos pelas dez horas e a professora, pontual, estava com ar sorridente e bem disposta. Tinha tido o cuidado de procurar uma sala para a entrevista para onde nos dirigimos mal nos encontrámos. Era uma sala pequena, num dos pavilhões da escola onde são dadas aulas com muito poucos alunos (Religião e Moral, por exemplo), ou onde trabalham grupos de professores. A sala serviu muito bem e não fomos nunca incomodados. Apenas curtas perturbações provocadas pelos toques das campainhas e pela saída dos alunos das salas.

A entrevista correu bem. Durou cerca de duas horas, foi fluente e a professora aparentou estar sempre à-vontade, não parecendo nada perturbada com a minha presença, nem intimidada com o gravador ou com as perguntas que eram colocadas. Mostrou sempre muita disponibilidade e espírito de colaboração, sentindo-se mesmo, com frequência, o seu esforço para ser clara ao transmitir as suas ideias, apesar de, em muitas situações, ter tido alguma dificuldade em explicar o que pensava ou sentia, perante algumas das questões da entrevista.

Maria da Graça falou bastante, sem grandes hesitações e aparentando gosto em responder, muito em particular sobre a sua vida enquanto aluna e sobre o seu percurso profissional. O mesmo aconteceu quando falou das suas aulas, embora sobre este assunto se sentisse a falta de elementos concretos que contextualizassem e especificassem o que dizia. Teve mais dificuldade em responder a perguntas sobre a Matemática e sobre a actividade matemática, ficando a ideia que em muitos casos era a primeira vez que se defrontava com questões como as que eram colocadas. Durante a entrevista foi manifesta a sinceridade e autenticidade naquilo que dizia e no modo como o fazia.

A segunda entrevista, como referi, realizou-se na mesma escola, à mesma hora, cerca de três semanas mais tarde, à mesma hora. Quando cheguei, cinco minutos depois da hora combinada, não encontrei Maria da Graça na sala dos docentes, mas não esperei muito. Por volta das dez e vinte a professora entrou na sala para ver se me encontrava. Estava já na escola, mas enquanto eu não chegava, tinha estado a tratar de problemas de horários.

A entrevista decorreu na sala que tinha sido utilizada da primeira vez. No início da conversa foram abordadas as perguntas que ficaram por colocar na entrevista anterior, a que se seguiram outras procurando esclarecer alguns dos aspectos já abordados. Foram depois feitas algumas perguntas que a observação de aulas já realizada suscitara. Na última meia hora, a professora foi confrontada com um conjunto de episódios[1] que ainda não tinham sido utilizados. Foi uma entrevista mais curta que a anterior (cerca de uma hora e meia) mas decorreu num tom e ritmo semelhantes.

A escolha e percurso profissionais

Maria da Graça tirou o curso na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa onde ingressou no princípio da década de setenta, tendo concluído o ramo educacional da Licenciatura em Matemática. É professora há mais de

[1] Anexo 4.

dezassete anos e, actualmente, lecciona numa escola secundária de Lisboa, onde está colocada no quadro de efectivos há dez anos.

Na passagem para o 6º ano do Liceu, quando teve que fazer a primeira escolha para prosseguir os estudos, a Matemática pesou na decisão que tomou: "escolhi logo uma alínea que tivesse Matemática" *(entrev. 1, p. 1)*. Na altura, como contou, depois de um princípio de escolaridade em que tal não acontecia, já gostava de Matemática e este facto teve influência na opção que fez.

Referindo-se ao período escolar após o 2º ciclo, Maria da Graça considerou que os professores foram bons (mencionou os de Matemática e de Física) dizendo que "explicavam muito bem" e eram "claros" *(entrev. 1, p. 25)*. Não deixou, no entanto, de sublinhar que, com poucas excepções, esses professores a intimidavam — "eram uns terrores" *(entrev. 1, p. 25)* — pelo modo como lidavam com os alunos. Descreveu-se como uma aluna participativa mas o que destacou para explicar os seus bons resultados a Matemática foi o auxílio extra-escolar que a certa altura começou a receber, prestado por uma prima. Este auxílio, mencionado logo no início da sua primeira intervenção na entrevista, terá sido muito importante na sua vida escolar. Graças a ele, passou a ter uma relação melhor com a Matemática que, por sua vez, conduziu a um maior investimento no estudo e a uma melhoria nos resultados. Esta cadeia de implicações com carácter de circularidade foi mesmo salientada pela professora:

> "Tive alguém que me conseguiu... fazer ver [a Matemática] de uma forma diferente. Eu penso que por isso é que eu depois... passei a gostar. Como passei a gostar, passei a trabalhar mais o assunto. Como passei a trabalhar mais o assunto, passei a ter melhores notas. E depois era um... era o brio. E [es]tá tudo ligado, umas coisas às outras."
>
> *(entrev. 1, p. 24)*

Terminado o Liceu, teve então que fazer nova opção, desta vez com mais hesitações: "estava muito indecisa entre a Matemática, a Física e as Engenharias" *(entrev. 1, p. 1)*. Sentiu assim dificuldades em escolher entre estas alternativas e para a decisão final terá pesado o facto de algumas colegas suas terem optado pelo curso de Matemática:

> "Eu tinha assim um certo receio de ir enfrentar uma Faculdade sozinha (riu-se). (...) Na turma onde eu estava, três colegas... duas

colegas iam para Matemática. Sabiam mesmo que queriam ir para Matemática. E então eu pensei assim: 'entre eu ir sozinha para uma coisa... e... e ir acompanhada, prefiro ir acompanhada'. E então decidi ir com elas. Pronto, foi um bocado assim que eu fui para Matemática, porque podia ter ido... Porque eu [es]tava muito ligada ou a Matemática ou à Física ou... ou a Engenharia, porque eram as três que eu achava que aplicava[m] a Matemática e que gostava daquilo."

(entrev. 1, p. 1)

Já na Faculdade, viria a escolher o ramo educacional do curso pois achou o ramo científico "muito teórico", o que parece tê-la desiludido — "achei aquilo... muito diferente do que estava à espera; muito teórico, e eu sou uma pessoa muito prática" *(entrev. 1, p. 1)* — e levado mesmo a lastimar-se pela escolha que fizera: "nessa altura arrependi-me não ter ido para... para Engenharia... conhecia pessoas que estavam em Engenharia e aquilo era muito mais prático, via-se a aplicação" *(entrev. 1, p. 2)*.

Maria da Graça manteve no entanto a opção, quer por razões de carácter económico — tinha a consciência que como professora arranjaria emprego com mais facilidade do que em outra profissão — quer, por considerar que o curso era "mais fácil" e "mais prático" *(entrev. 1, p. 2)*. Segundo as suas próprias palavras, "acomodou-se" à ideia de vir a ser professora, profissão que satisfazia o seu gosto de relacionamento com pessoas e de uma certa independência: "não gosto de ser dirigida (riu-se) (...) e achei que como professora não tinha um chefe" *(entrev. 1, p. 3)*. Mencionou também o gosto que nessa altura já sentia pelo ensino e que justificou por ter começado muito cedo a dar explicações, ainda que isso não determinasse a disciplina escolhida que, como fez notar, podia ter sido a Matemática ou a Física.

Diga-se a propósito que Maria da Graça, falando ainda do que teria contribuído mais para decisão da profissão que escolheu, evocou as ideias do pai dizendo que ele "achava que as mulheres deviam ser professoras" *(entrev. 1, p. 3)*. Explicou que o pai pensava desse modo porque no seu emprego as mulheres eram secretárias na dependência de chefes masculinos, e ele não desejava que as suas filhas passassem pelo mesmo. "Sempre ouvi aquela história", disse Maria da Graça referindo-se ao pai, "ser professor é que é bom" *(entrev. 1, pp. 3-4)*.

Sobre a sua formação educacional enquanto aluna na Faculdade de Ciências, a professora manifestou-se algo decepcionada: "eu esperava que me desse mais qualquer coisa do que aquilo que me deu" *(entrev. 1, p. 15)*. Em relação às cadeiras de carácter pedagógico geral, embora sem manifestar grande entusiasmo, vê-as como lhe tendo proporcionado uma espécie de cultura geral e aberto algumas perspectivas. Das cadeiras de índole didáctica, esperava um apoio mais concreto e orientador que não veio a acontecer. Não é que pretendesse, como sublinhou, algum receituário, mas na formação que recebeu sentiu falta de orientações didácticas específicas — "umas dicas", "formulazinhas", "directrizes" *(entrev. 1, p. 16)* — que pudessem servir de orientação no seu futuro como professora. Esta é a sua principal crítica que a levou a dizer: "eu saía daquelas aulas com uma sensação de que... pronto, de que pouco aprend[era]" *(entrev. 1, p. 16)*.

Também em relação ao estágio pedagógico, a sua opinião não é muito positiva. Começou mesmo por afirmar que o estágio foi "muito mau" *(entrev. 1, p. 17)*, mas, reconsiderando um pouco, atribuiu-lhe também aspectos positivos. Fez uma divisão nítida na sua apreciação, separando, por um lado, o orientador, de quem disse não ter recebido qualquer apoio, apenas intervindo na avaliação: "guardou tudo quanto era críticas para fazer no último dia, no dia da avaliação; quer a gente trabalhasse bem, quer a gente trabalhasse mal, o que nós soubemos foi no último dia"*(entrev. 1, p. 17)*. Por outro lado, referiu-se de modo positivo ao grupo de colegas de estágio, do qual guarda boas recordações, e cujas relações e trabalho conjunto apresentou como tendo constituído uma experiência muito positiva e mesmo a única fonte de aprendizagem significativa desse ano:

> "Foi um grupo óptimo, fizemos coisas muito giras, trabalhámos sempre em grupo, fazíamos reuniões... malucas aos sábados e aos domingos era[m] todos. (...) Ehhmm... nós é que nos ajudávamos umas às outras, porque elas tinham mais experiência. Eh... eu era a única... que nunca tinha dado aulas, era o primeiro ano que [es]tava a dar aulas. Elas já todas tinham dado aulas, e estavam a dar. Portanto, era[m] elas que... Aquilo que aprendi, aprendi com elas. E aprendi muito, aprendi muito."
>
> *(entrev. 1, p. 18)*

Convidada a pronunciar-se sobre a sua evolução como professora, Maria da Graça reconheceu ter mudado bastante e valorizou muito, nessa mudança, o papel da experiência no ensino. A este propósito, evocou um conhecimento antigo, um "velhote" como o tratou, marido da sua professora primária, que lhe terá dito: "um professor de Matemática só é bom ao fim de dez anos" *(entrev. 1, p. 11)*. Aparentando inteira concordância com esta ideia, reconheceu que, embora sendo mais comedida, também considerava que a prática de ensino tem um papel determinante na evolução do professor, explicando do seguinte modo:

> "Acho que realmente, [n]o primeiro ano [em] que nós damos uma matéria... ehhhmmm... ou, ou mesmo [n]os primeiros anos [em] que ensinamos, porque não temos uma visão da globalidade, falta-nos aquele espírito de dizer: 'olha, isto é importante, porque isto vai ser preciso'; 'isto é menos importante, porque isto não tem muito interesse futuro, nem lhes desenvolve assim grandes coisas'. (...) Depois, [quando] a pessoa experimenta uma determinada... táctica e acha que se os alunos não correspondem... há duas hi[póteses]... ehh... considera assim: 'ou foi falha minha, ou foi falha deles'. Mas [se] nunca tinha experimentado antes, naturalmente até nem nota... que há falha. Ao fim de uns certos anos, a pessoa já... já sabe mais ou menos que as reacções [dos alunos]... a determinadas coisas, são sensivelmente sempre as mesmas... "
>
> *(entrev. 1, p. 11)*

Deste modo, continuou a professora, porque domina hoje muito melhor os assuntos do programa, consegue, "dar-lhes a volta (...), que [os conceitos] fiquem sempre bem [tratados]" e "tirar todas as dúvidas" aos alunos *(entrev. 1, p. 12)*. Assim, para Maria da Graça, os anos de ensino ter-lhe-ão proporcionado, sobretudo, um maior domínio e segurança dos assuntos do programa e um maior à-vontade no seu tratamento e no esclarecimento dos alunos. No seu entender, só com experiência de ensino se consegue ter uma visão global da Matemática a ensinar e distinguir o que é mais ou menos importante, tendo a noção das implicações e relações entre os vários assuntos, bem como das dificuldades mais frequentes dos alunos, como fez notar a professora:

> "Eu ao princípio tenho a certeza que certos problemas dos alunos me passavam completamente despercebidos. Neste momento, eu já sou capaz de... perceber com mais facilidade determinados problemas

> pontuais de cada aluno. Que era uma coisa que... Pronto, ao princípio não tinha aquela noção... e agora já vou tendo. Já vou conseguindo perceber que aqui... têm dificuldades sobre isto. E este tem, mas aquele não tem. Por razões... particulares de cada um."
>
> *(entrev. 1, p. 13)*

A este propósito, Maria da Graça sublinhou o papel das explicações particulares que dá. Permitem-lhe, como disse, trabalhar melhor os assuntos, numa relação individualizada, e ter assim uma percepção mais completa das dificuldades que surgem em cada caso. Considerou muito difícil conseguir esta relação nas suas aulas — "aquela dúvida interior de cada aluno... ehh... é muito complicado nas turmas que temos com trinta alunos, detectar uma a uma" *(entrev. 1, p. 14)*. Para a professora, pelas razões enunciadas, a experiência com os seus explicandos tem sido "muito importante" e contribuído para a melhoria das suas aulas.

Podemos pois dizer que os anos que Maria da Graça tem a ensinar Matemática ter-lhe-ão dado por um lado, um conhecimento mais profundo e completo dos programas e por outro, uma maior sensibilidade às dificuldades mais habituais dos alunos e maior capacidade para as prever. "Nestas coisas", disse ainda a professora, a experiência "bate tudo" *(entrev. 1, p. 12)*.

Relativamente ao modo como aborda os assuntos matemáticos nas aulas, Maria da Graça declarou ter propensão para a "exposição" e que, embora reconheça alguma mudança também neste aspecto, sente dificuldade em contrariar esta sua tendência:

> "Eu fazia aulas muito mais expositivas ao princípio. Neste momento já faço aulas... com... menos... exposição. E... [mas] ainda peco um bocado pela... exposição. Ainda não sou capaz de ehh... (...) de desligar completamente, serem eles a... Isso ainda... Faz-me muita confusão."
>
> *(entrev. 1, p. 14)*

Esta dificuldade, como explicou, acentua-se nos anos terminais do ensino secundário, particularmente no 12º ano. Neste ano de escolaridade, sente maiores constrangimentos curriculares — "começa-me logo a assustar... a quantidade de matéria que tenho para dar" *(entrev. 1, p. 15)* — e que a responsabilidade do professor na preparação dos alunos é maior, devido às provas de avaliação finais externas. Por esta razão, acaba por dar aulas "altamente expositivas" *(entrev. 1; p. 15)*, explicando que o faz conduzida pela atitude de pouca participação dos alunos e por sentir que é o tipo de aula que eles próprios desejam. Em seu entender, os alunos no 12º ano são pouco participativos, querem, como explicou, "informação-registo" *(entrev. 1, p. 15)*, isto é, esperam que o professor lhes proporcione a informação necessária que eles devem transcrever.

Quando lhe perguntei pelo que mais a motivava na profissão, Maria da Graça referiu, sem hesitar, o "relacionamento com os alunos", que gostava "conversar" com eles e de "conhecer os seus problemas" *(entrev. 1, p. 18)*. "Depois", acrescentou, "eu gosto muito de ensinar, gosto de transmitir aquilo que sei aos outros" *(entrev. 1, p. 18)*. No entanto, também sem hesitação, considerou que não se sentia profissionalmente realizada, devido principalmente ao insucesso dos alunos e à atitude negativa de muitos deles nas aulas e para com o professor. O que provoca a sua frustração são os alunos que "não correspondem a nada", são "completamente desinteressados", "não ligam nenhuma" e com os quais é como "trabalhar para as paredes" *(entrev. 1, p. 19)*. Com estes alunos sente-se muitas vezes sem saber o que fazer: "não consigo encontrar nada, nada que os consiga motivar" *(entrev. 1, p. 19)*. Este sentimento, aliado também a algum desânimo, voltou a manifestar-se, já na segunda entrevista, quando a professora procurou explicar o facto de haver quem considere que os alunos terminam o ensino secundário mal preparados:

> "Ou se muda um pouco o espírito dos alunos e eles partem do princípio que também têm que fazer um esforço para aprender, ou então a gente não consegue chegar a lado nenhum. Aliás eu neste momento sinto-me muito mal. Sinto que não consigo fazê-los chegar a lado nenhum, não sou capaz de os motivar de maneira nenhuma, e entrei numa fase de... desespero, principal[mente] porque já não, não conheço processos, não sei processos para os conseguir motivar."
>
> *(entrev. 2, p. 16)*

Tudo isto, muito provavelmente, justifica o facto de a professora não parecer particularmente entusiasmada a falar deste assunto, referindo-se a "altos e baixos" *(entrev. 1, p. 19)* no modo como vai vivendo o seu dia a dia profissional: "há dias que a pessoa está extraordinariamente optimista (...) [e] tem outros dias que a pessoa sai dali mais que desmotivada" *(entrev. 1, p. 19)*. Em sua opinião, a situação agrava-se com o actual desprestígio social da profissão e da figura do professor. Para Maria da Graça, esta desvalorização, fora e dentro da escola, faz com que para muitos alunos o professor seja "aquela coisa [a] que se não liga" *(entrev. 1, p. 19)*. Todas estas questões parecem, pois, provocar-lhe algum desencanto profissional, que diga-se, se manifestou logo no princípio da entrevista quando evocou a influência do pai que a via com bons olhos na profissão de professor: "se ele me ouvisse hoje, acabava por não achar nada assim" *(entrev. 1, p. 4)*.

A Matemática

Quando Maria da Graça teve que escolher entre as opções de que dispunha para se matricular no então 6° ano do Liceu, inscreveu-se na alínea f). Nessa altura, como contou, já gostava de Matemática e esse facto terá tido bastante influência na escolha que fez. No entanto, a sua relação com esta disciplina, ao longo de toda a escolaridade, não foi sempre uniforme.

No 1° ciclo, embora referido muito de passagem e sem mencionar a Matemática, a experiência não terá sido muito positiva, como sugerem as suas palavras: "eu... do Primário eu não recordo coisas muito boas (riu-se)... sob ponto de vista nenhum" *(entrev. 1, p. 18)*. As memórias que guarda do 2° ciclo, embora pouco nítidas, também não são muito boas. Não recordou nenhum dos seus professores, mas referiu-se a dificuldades de adaptação, eventualmente por ser um ano de passagem, e ao facto de ter sido colocada numa turma fraca, o que terá contribuído para as dificuldades que disse ter sentido:

> "O meu primeiro ano do [2°] ciclo não foi bom (...) teve coisas... mais fracas. E eu nem me lembro porquê. Sei lá se os professores que eu tive... se tive bons, se tive maus. Isso já não me lembro... e de nada. Mas sei que o meu primeiro ano do [2°] ciclo não foi nada bom. A nível geral. Foi aquela transição... E eu custou-me muito a adaptar à transição... Depois [es]tava numa turma muito má. E... e aquilo era mesmo muito mau. E eu... tive muitas dificuldades. E aí eu não entendia nada do assunto."
>
> *(entrev. 1, p. 27)*

Esclareceu no entanto que estas dificuldades eram de carácter geral e não incidiam particularmente na disciplina de Matemática. "Foi geral", disse, relacionando-as com uma certa aversão pelo estudo que atribuiu a uma "fase má" da vida das pessoas: "eu também não gostava muito de estudar, para dizer a verdade; (...) era assim uma certa 'ralação' para eu estudar" *(entrev. 1, p. 28)*. Ainda hoje diz sentir uma predilecção pelo trabalho manual — costura, malhas, trabalhos de electricidade, foram alguns exemplos que deu — e pouco tempo para tarefas que não obriguem a grandes esforços intelectuais: "sinto que tenho necessidade... em determinadas alturas... de parar... e ocupar o tempo em coisas que não me façam pensar e que me façam só mexer mãos" *(entrev. 1, p. 28)*.

O seu gosto pela Matemática terá começado a partir do final do 2º ciclo e, pelo que Maria da Graça disse, manteve-se até entrar na Faculdade. Descreveu-se, durante este período de escolaridade, como uma aluna "francamente boa" a Matemática, pois tinha resultados muito bons nessa disciplina — "dezasseis e dezassetes" — o que a levou a considerá-la como a sua "coroa de glória" *(entrev. 1, p. 24)*. Isto também acontecia em Física, mas não nas disciplinas de letras onde o sucesso era mais problemático: "[n]a parte de letras, fui sempre uma aluna muito fraca, passava à tangente; quando não chumbava a Francês, chumbava a Inglês, quando não chumbava a Inglês, chumbava a Português... era sempre uma que era pa[ra] esquecer" *(entrev. 1, p. 24)*.

Solicitada a clarificar melhor os motivos que a terão levado a ver a Matemática de um modo diferente, não conseguiu explicar muito bem. Considerou que os seus professores ensinavam bem, mas os alunos nem sempre tinham coragem para colocar dúvidas e muitas vezes não se apercebiam se estavam ou não a compreender o que o professor explicava: "ele há dúvidas que na altura a pessoa nem as tem (...) e a dúvida só se põe quando a pessoa chega a casa e estuda" *(entrev. 1; p. 25)*. No seu caso, a ajuda que tinha em casa corrigia estas situações: "eu percebi sempre tudo o que estava a fazer, porque quando eu não percebia na aula, tinha alguém em casa que me ajudava a perce[ber]..." *(entrev. 1, p. 25)*. Para Maria da Graça, sublinhe-se, esta ajuda terá sido a contribuição determinante para a inversão da sua relação com a disciplina de Matemática: "eu acho que aquilo que me marcou mais na minha relação com a Matemática, não foi propriamente os professores da escola, mas foi o acompanhamento que eu tive em casa" *(entrev. 1, p. 26)*.

Uma vez na Faculdade, Maria da Graça voltou a sentir algumas dificuldades em certas disciplinas, acompanhadas de um sentimento de desilusão com a escolha que fizera. Quis uma licenciatura com Matemática mas, ao contrário do que esperava, achou o curso demasiado teórico o que, como vimos, terá mesmo causado algum arrependimento por não ter seguido um curso de carácter mais prático, como Engenharia. Explicou as dificuldades que sentiu, sobretudo em algumas disciplinas dos primeiro anos, como o Cálculo, referindo os problemas de adaptação ao ambiente e ao ritmo das aulas e a novidade dos assuntos. Mencionou, a propósito, o facto de o seu pai, no 6º ano do Liceu, não a ter inscrito numa turma da Matemática Moderna que então se experimentava — "ele achou que a [Matemática] clássica é que devia ser boa" *(entrev. 1, p. 29)* — o que, em sua opinião, se relaciona com as dificuldades que veio a ter na Faculdade: "eu senti muita dificuldade a entrar naquele... naquelas... naqueles conceitos que pr'a mim eram completamente novos" *(entrev. 1, p. 30)*.

Tudo isto terá feito com que Maria da Graça sentisse muitas diferenças entre a Matemática no ensino secundário e a Matemática no ensino superior. Comparando uma e outra, disse que gostava mais do que aprendera no Liceu pois, o curso de Matemática era "muito teórico", "eram muitas letras", razões que terão contribuído para considerar os assuntos "complicados" e "confusos", e para a dificuldade em compreendê-los — "aquilo não me dizia nada" *(entrev. 1, p. 31)*. Além disso, não encontrava nas disciplinas qualquer relação ou aplicação extra-matemática: "quando cheguei à Faculdade, eu achei que aquilo não se aplicava em lado nenhum" *(entrev. 1, p. 31)*. Um pouco adiante na entrevista, para explicar sentimentos de pouca autoconfiança, a professora relaciona-os com esta sua experiência no ensino superior. "Isto vem-me um bocado da Faculdade, porque eu vinha habituada... a que Matemática para mim era... era uma coisa que eu... percebia sempre", disse, prosseguindo do seguinte modo:

> "Quando cheguei à Faculdade, eu senti... que não era capaz. E eu tive alturas no curso, principalmente no primeiro semestre, que... que tive tendência enorme pa[ra] abandonar, porque sentia-me completamente a navegar, sentia que aquilo p'ra mim, não me dizia nada, não era nada e eu não percebi[a], eu não entendia nada daquilo. E assustei-me. E esse medo... de que as coisas... muito científicas... p'ra mim não... que eu não sou capaz. Eu fiquei com esta de que eu não sou capaz."
>
> *(entrev. 1, p. 36)*

Quando lhe perguntei se se via como professora de outras disciplinas, Maria da Graça não hesitou e foi peremptória na rejeição de tal possibilidade. "Nunca, nunca", disse, acrescentando depois: "eu só me vejo a ensinar Matemática, só me vi toda a vida a ensinar Matemática" *(entrev. 1, p. 22)*. No seguimento desta afirmação, viria a incluir também a Física, explicando a preferência por estas disciplinas, pelo facto de considerar que não tem inclinação para a escrita e que não gosta de escrever, nem de ler. A estas razões, acrescentou ainda a sua atracção por coisas "muito práticas" *(entrev. 1, p. 22)*, e o facto de ver a Matemática como "um código diferente" que explicou do seguinte modo:

> "Eu achei que a Matemática... era um código diferente. Aqueles códigos são números, aqueles números simbolizam coisas... E até mesmo os conceitos... Eu acho que os conceitos [matemáticos] são muito claros. Não têm... dupla... leitura. E tudo o que tenha dupla leitura, p'ra mim eh... faz-me muita confusão e já não gosto, pronto."
>
> *(entrev. 1, p. 22)*

Clareza, ausência de ambiguidades, parecem assim ser qualidades que a professora reconhece na Matemática e que justificam a sua preferência por essa disciplina, a par com a Física. Por isso disse que não se vê a ensinar outras disciplinas, particularmente disciplinas de letras, que pouco lhe dizem, ressalvando no entanto os aspectos gramaticais. No seu entender, as regras de gramática são a Matemática das línguas:

> "Eu mesmo quando ajudo o meu filho nos estudos... — e eu dou-lhe uma certa ajuda — há coisas que digo: 'a Matemática... Físicas e Químicas... eu ajudo-te. Eh... eu até no Francês dou-te uma ajudinha, mas o que for na parte gramatical'. Lá está... p'ra mim, a gramática são regras, são regras [como na] Matemática. Com contextos diferentes, é evidente, mas são regras. Relativamente ao Inglês, gramática encantado, só regras."
>
> *(entrev. 1, pp. 22-23)*

A primazia que a certa altura a Matemática passou a ter entre as preferências escolares de Maria da Graça, pesou, como vimos, na determinação do seu percurso no ensino secundário e teve também influência na escolha da sua profissão. A opção académica poderia ter sido outra — uma licenciatura em Física ou Engenharia — mas, na disciplina base, a escolha estava feita. Qualquer que fosse o curso escolhido, tinha que ter uma componente matemática forte pois, como disse, era pela Matemática que se sentia mais atraída.

Quando explicou a sua escolha profissional, logo no princípio da primeira entrevista, a professora referiu-se à sua preferência pela Matemática dizendo que, a via como "um mundo completamente diferente do resto do mundo à volta" *(entrev. 1, p. 4)*. Mais tarde, já na segunda entrevista, a tentativa de clarificar o sentido desta afirmação, deu origem ao diálogo que a seguir transcrevo.

Inv. — Olha, na primeira entrevista tu disseste (...) que a Matemática é um mundo diferente (...). És capaz de explicar um pouco mais o que é que queres dizer com isto?

M.G. — ...A, vamos lá ver, pensar... Tem uma linguagem diferente... trabalha as coisas de maneira diferente, [e] como? A... a pessoa sem saber mais nada do resto, consegue trabalhar só aquilo... [É] uma linguagem muito específica... é muito concreta ...

Inv. — O que é queres dizer com 'concreta'?

M.G. — É sim, ou não.

Inv. — Ah, concreta nesse aspecto. Linguagem própria, específica... sim ou não. [E] mais?

M.G. — Depo[is]... Também é abstracta, portanto...

Inv. — Pois, foi por isso que eu fiz a pergunta [sobre o] 'concreta'.

M.G. — Pois. Também é abstracta, a... Abstracta agora no outro sent[ido]. É abstracta porque nós podemos trabalhá-la, aquilo que eu disse há bocadinho, podemos trabalhá-la sem... sem saber mais nada à volta, pronto. Mas depois também se a quisermos aplic[ar]... As outras coisas também não funcionam sem ela.

Inv. — Pois, e a Matemática funciona sem as outras coisas ou não?

M.G. — Aquilo que já está descoberto funciona (riu-se). As outras coisas que se descobrem, é um bocado porque são necessárias, não é? A Matemática desenvolve-se porque é necessária para outras coisas, mas depois aquilo que está descoberto pode-se trabalhar perfeitamente sem as outras coisas.

(entrev. 2, p. 17)

Neste diálogo, Maria da Graça procede a uma caracterização da Matemática retomando, em primeiro lugar, a ideia de que não há ambiguidade nesta ciência, que as suas proposições não são dúbias ou susceptíveis de múltiplas interpretações. Ou são verdadeiras, ou são falsas, na Matemática "é sim, ou não", foi o que disse. Esta visão da professora já se tinha manifestado no final da primeira entrevista, quando foi confrontada com a ideia da Matemática como uma ciência exacta, construída dedutivamente[1], e voltou de novo a evidenciar-se na sua reacção perante os comentários fictícios de um aluno a justificar a sua preferência pela Matemática[2]. Em ambas as situações, Maria da Graça identificou-se com as ideias apresentadas considerando, face à primeira, que, em Matemática, um conceito "ou é, ou não é" e que, nesta disciplina, as coisas são "muito certinhas" *(entrev. 1, p. 45)*. A propósito, aventou a hipótese de ser este o motivo por que gosta de Matemática: "eu tenho impressão que é um bocado por isso que eu gosto da Matemática, porque... porque é uma coisa [em] que eu sei com o que conto" *(entrev. 1, p. 45)*.

Confrontada com a segunda situação, declarou que concordava "cem por cento" com as opiniões do aluno, que a Matemática "é clara e é concisa", acrescentando ainda a ideia de que a Matemática é "prática", parecendo com isto referir-se à já mencionada clareza ou ausência de ambiguidade nas ideias e processos matemáticos — "não há as duas hipóteses, aquilo ou deu certo e está certo, ou deu errado e está errado" *(entrev. 2, p. 10)*.

O carácter abstracto com que no mesmo diálogo Maria da Graça caracteriza depois a Matemática, já tinha também sido utilizado para a distinguir das outras ciências: "a Matemática pode ser trabalhada toda no abstracto... enquanto que as outras [ciências] são trabalhadas todas no concreto" *(entrev. 1, p. 39)*. No entanto, para a professora, o desenvolvimento da Matemática, como o das outras ciências, não é desligado de uma origem exterior 'real', embora reconheça a dificuldade em integrar no ensino esta sua característica. "P'ra mim, [a Matemática] tem base concreta, disse a este respeito, acrescentando, "eu não sei é se, quando se transmite, ela se consegue transmitir dessa forma (...); em relação às outras ciências, eh... neste aspecto, eu acho que todas elas têm base concreta, a Matemática também tem, pronto." *(entrev. 1, p. 39)*.

Há aqui, portanto, uma aproximação entre a Matemática e as outras ciências, sendo as respectivas linguagens aquilo que, do ponto de vista da professora, mais as distingue: "eu acho que a diferença maior é em termos de

---

[1] Anexo 4, episódio 14.
[2] "[Eu gosto] de Matemática (...) porque tudo é muito claro e conciso, o problema ou está certo ou está errado (...)" (anexo 5, episódio 13).

linguagem" *(entrev. 1, p. 39)*. A Matemática, para Maria da Graça será uma ciência abstracta mas com raízes fora da Matemática, e os conhecimentos matemáticos, como também disse, desenvolvem-se respondendo a necessidades que lhe são exteriores: "aquilo que eu sei, é que ela aparece por necessidade... da sua aplicabilidade" *(entrev. 1, p. 41)*.

Quando a professora respondeu à pergunta sobre se a Matemática era inventada ou descoberta, inclinou-se para a segunda hipótese considerando todavia que há conhecimentos matemáticos que, pela sua evolução, se vão desligando da sua origem externa:

> "[A Matemática] foi descoberta por necessidade de tudo, pois claro, deve ter sido. [Depois] foi aperfeiçoada, foi... eh... Há coisas que depois hão-de aparecer tipo em... não digo em laboratório, mas em papel e lápis, que... já estão um pouco desligadas... daquilo que... da mola que as fez aparecer. Mas eu acho que a Matemática, a mola dela foi, o salto foi, exactamente, a necessidade."
>
> *(entrev. 1, p. 48)*

Nesta declaração, está já presente a aplicabilidade da Matemática, outro dos elementos que a professora utiliza na caracterização desta ciência no diálogo atrás transcrito e que mencionou em diversos momentos. Em seu entender, o carácter abstracto da Matemática confere-lhe grande aplicabilidade, e manifestou esta ideia quando pedi uma reacção à frase onde se afirmava o carácter árido da linguagem matemática[1]: "acho que é verdade, é verdade porque, lá está, para se poder aplicar a tudo, ela tem que acabar por ser abstracta; se é abstracta, acaba por ser árida" *(entrev. 1, p. 47)*.

Confrontada com a ideia da 'inutilidade da Matemática pura'[2], manifestou imediatamente a sua discordância, embora reconhecesse que, entre os alunos, é essa a visão dominante, o que explicou pelo facto de a Matemática ser ensinada desligada das suas aplicações: "eu acho que esta é a visão que os alunos têm da Matemática... porque eles... realmente só lhes ensinam aquelas coisinhas de resolver as equaçõezinhas, pronto; eu acho que é importante, eles têm que saber [isso], não é, mas... eles não vêem qual é a parte... a aplicabilidade [da

[1] Anexo 4, episódio 15.
[2] Anexo 4, episódio 4.

Matemática]:..." *(entrev. 1, p. 46)*. A própria Maria da Graça reconheceu, no entanto, a dificuldade dos professores em ensinar muitos dos assuntos de modo a que os alunos se apercebam das suas eventuais aplicações fora da Matemática. Em sua opinião, isto é mais difícil de conseguir do que no ensino de outras ciências e, como disse "é realmente muito mais complicado fazer-lhes ver que [a Matemática] se aplica, que é a base das outras coisas todas" *(entrev. 2, p. 18)*.

A actividade matemática

Para lá do que obrigam a preparação e a realização das suas aulas, Maria da Graça considerou que o seu envolvimento com a Matemática é reduzido. Contou que de vez em quando lê um artigo de alguma revista mas, como disse, isso "é muito raro" *(entrev. 1, p. 34)*. Quando lhe coloquei a hipótese de frequentar cadeiras de Matemática na Faculdade, não viu essa possibilidade com muito bons olhos — "acho que não encararia [isso] muito bem (riu-se)" *(entrev. 1, p. 35)*. — manifestando alguma falta de confiança em relação às suas capacidades. Explicando esta falta de confiança, a professora aludiu a uma característica pessoal que exprimiu do seguinte modo: "o problema é sempre o mesmo, eu acho que não sou capaz" *(entrev. 1, p. 35)* e, como já vimos, relacionou este seu sentimento, com a sua experiência pouco gratificante na vertente científica da licenciatura, nos anos iniciais.

Na verdade, Maria da Graça manifestou alguma desilusão com o percurso matemático do seu curso que achou demasiado teórico e que não correspondia à imagem que trazia do ensino secundário. A uma escolaridade bem sucedida a Matemática, com bons resultados e em que se sentia gratificada, sucedeu-se, no ensino superior, um período de alguma frustração e dificuldade que terá gerado as consequências que a professora enunciou.

Vale a pena acrescentar aqui que Maria da Graça se referiu à falta de confiança nas suas próprias capacidades, como algo de recorrente e que se manifesta também sob a forma de receios ou hesitações perante situações novas ou de mudança. No princípio da entrevista, recordo, sobre o início da sua carreira, evocou a sua timidez e o receio que sentia quando se transferia de escola. Este seu sentimento que ocorre em situações de mudança, também se manifestou quando se pronunciou sobre uma eventual possibilidade de orientar estágio: "é uma coisa que eu até era... capaz de gostar de vir a fazer, [mas] até aqui tenho tido muito medo, (...) lá está, faz parte daquele... daquilo que eu sinto, eu tenho sempre medo... do salto pa[ra] qualquer coisa diferente (riu-se)" *(entrev. 1, p. 21)*. A este propósito, logo a seguir, a professora recordou a passagem da Escola Primária para o Liceu — "senti-me tão mal naqueles primeiros tempos" *(entrev. 1, p. 21)* — e do Liceu para a Faculdade.

Ainda falando do mesmo assunto, Maria da Graça, no entanto, deu a entender que se sente hoje já um pouco diferente, quer em relação ao facto de ter que estudar — "eu hoje já gosto... eu hoje já... aprendo coisas por gosto, gosto de ouvir coisas novas" *(entrev. 1, p. 35)* — quer perante situações de mudança de que deu o exemplo da decisão que tomou em leccionar o 12º ano — "lancei-me assim... de cabeça (...) se a outra [colega] faz, porque é que eu não hei-de ser capaz?" *(entrev. 1, p. 36)*.

Os conceitos e as regras, a importância da compreensão. Um professor de Matemática pode ser visto como um matemático? A esta pergunta da entrevista, Maria da Graça respondeu depressa e sem hesitações: "ah, eu não sou; eu sou professora de Matemática e não me sinto nada [uma] matemática" *(entrev. 1, p. 32)*. E explicou-se do seguinte modo:

> "Eu acho que... que o matemático, naquele sentido em que eu o vejo, é aquela pessoa que só vê aquilo. Tudo à sua volta gira naqui[lo], na Matemática. P'ra ele é Matemática p'ra tudo e pa[ra] mais alguma coisa. E... eu não, não sinto nada disso, sinto que... [a] Matemática ou serve pa[ra a] pessoa utilizar noutras coisas e a aplica [ou] (...). Não [a vejo] como um objectivo sozinho, a atingir sozinho."
>
> *(entrev. 1, p. 32)*

Na forma como a professora justificou a sua afirmação, transparece a ideia de que não se identifica como uma matemática porque a Matemática não ocupa um lugar central na sua vida e porque, quando trabalha com ela, não a considera como um fim em si mesma. "Eu não giro à volta da Matemática", disse na sequência do que atrás afirmou, acrescentando: "a Matemática para mim não é objectivo... final... de tudo" *(entrev. 1, p. 32)*. Em seu entender, tal não sucede com os matemáticos que vê a viverem muito envolvidos com a Matemática e com uma perspectiva e objectivos diferentes dos seus, no trabalho com esta ciência.

Maria da Graça concordou que também lida com a Matemática, e que "até [tem] gosto" *(entrev. 1, p. 34)*, vendo neste gosto algo de comum com os matemáticos. Todavia, como explicou, o seu propósito é ensiná-la, enquanto que o trabalho dos matemáticos tem, para ela, o objectivo de fazer crescer o conhecimento no seu domínio: "um matemático explora... para chegar a coisas mais à frente, sim, mas... não é com o espírito de ensinar a alguém, é com o espírito de... de que as coisas evoluam" *(entrev. 1, p. 34)*.

Por estas razões, no seu trabalho como professora, Maria da Graça não acha que se envolva muito em actividades de carácter matemático, embora reconheça esse envolvimento quando trabalha com conceitos de maior elaboração, nos anos de escolaridade mais avançados. "Aí", disse, "acho que [es]tou a desenvolver conceitos matemáticos, estou a trabalhar [em] Matemática", acrescentando ainda:

> "Até ao unifi... unificado, e às vezes até no princípio do 10º ano, eu sinto que estou a desenvolver regras... de cálculo. Pronto, aí eu sinto que não é bem, bem... Faz parte de, mas não é aquilo que tenho como conceito de [um] matemático."
>
> *(entrev. 1, p. 33)*

Para a professora, 'fazer Matemática' parece ser essencialmente um trabalho com conceitos embora, com os alunos, esse trabalho consista sobretudo na utilização desses conceitos, tal como se depreende nas suas declarações, quando procurou explicar se os alunos fazem ou não Matemática nas aulas:

M.G. — [O aluno] faz Matemática, eh... ele... constrói... Ele constrói, não, ele... aplica. Eu acho que ele aplica mais... do que o que constrói. Quer dizer, ele aplica conceitos... e o aplicar conceitos na resolução de alguns exercícios, não é só cálculos, são conceitos que ele aplica, ele aplica conceitos. Nesse sentido, ele faz Matemática.

Inv. — Tu dizes que não constrói conceitos. Mas como é que ele... [os] aplica sem os construir?

M.G. — Porque a maior parte das vezes eles são-lhe dados...

Inv. — E portanto transmitidos.

M.G. — São transmitidos pelo professor, e ele depois eh... aprende-os a aplicar, e aplica-os...

Inv. — Mas compreende-os ou não?

> M.G. — Pronto. Eu acho que ele aplica-os quando os compreende... e tem mais dificuldades em os aplicar quando não os compreende. E aí nessa altura, eu sinto que as dúvidas acontecem quando eles não compreendem os conceitos e portanto, se não os compreendem, não os sabem aplicar... decoram fórmulas.
>
> *(entrev. 1, pp. 56-57)*

Para além dos conceitos, Maria da Graça nomeou as regras, considerando uns e outros elementos essenciais na actividade matemática. Na Matemática, disse na sequência do diálogo anterior, "podemos distinguir estas duas coisas — mas no fundo fazem parte de um todo — que é o conceito e depois a aplicabilidade prática de regras... que facilitam... a utilização dos conceitos;... tudo isto faz parte da Matemática, tudo isto é Matemática" *entrev. 1, p. 57)*. Num e noutro caso, parece ser atribuída à compreensão — dos conceitos, das regras — um papel relevante na determinação do carácter matemático da actividade que o aluno desenvolve.

Por exemplo, Maria da Graça aceitou que certos alunos podem ser vistos como matemáticos no trabalho que realizam nas aulas, embora em sua opinião sejam raros — "ao longo destes meus anos todos, apanhei pr'aí uns dois ou três" *(entrev. 1, p. 56)* — e caracterizou esses alunos como tendo "um espírito muito crítico", querendo sempre perceber tudo o que fazem ou que lhes é apresentado: "se as coisas não [es]tão todas... demonstradinhas até... à última das... das consequências, eles não... não ficam satisfeitos (...) tem que ser tudo muito provado, o porquê, do porquê, e o porquê do porquê" *(entrev. 1, p. 56)*.

Para além disso, Maria da Graça considerou como bom aluno a Matemática, aquele estudante que "consegue descobrir as coisas à primeira", com "óptima capacidade de raciocínio" *(entrev. 2, p. 13)* e capaz de compreender os raciocínios matemáticos, mesmo em situações novas. Percebe-se também uma valorização da compreensão quando a professora diz que não é preciso fazer muitos exercícios mas sim "conversar" com aqueles que se fazem, explicando esta sua expressão do seguinte modo:

> "Eu já tenho dito muitas vezes [que] não é preciso fazer muitos [exercícios]. É preciso é fazê-los, fazer alguns, e ir fazendo e conversando com os exercícios (...). Ao mesmo tempo que se vai

> fazendo, ir dizendo 'vou fazer isto por isto e isto e isto, e agora faço isto, por isto e isto e isto'. E isto (...) obriga-me a que eu não tenha que fazer cinquenta [exercícios] para mecanizar o esquema."
>
> *(entrev. 2, p. 13)*

No entanto, a professora considerou que há bons alunos em Matemática de um outro tipo, aqueles que têm boas notas porque estudam muito mas, como disse, por vezes, sem sequer saberem o que estão a fazer. Reconhece assim que é possível ter bons resultados em Matemática com base na memorização: "se a pessoa mecanizar os fios condutores do racio[cínio], dos exercícios" *(entrev. 2, p. 14)*. Porém, no entender da professora, "isto não é fazer Matemática" e o aluno nesta situação "não sabe nada Matemática" *(entrev. 2, p. 14)*. Por esta razão, Maria da Graça sublinhou a importância da compreensão:

> "Ele sabe Matemática quando faz as coisas sabendo o que é que está a fazer e porquê e... Essencialmente o porquê, e sabendo porque é que se faz [assim]. Eu acho que é fundamental."
>
> *(entrev. 2, p. 14).*

Esta valorização da compreensão também se manifestou na forma como Maria da Graça reagiu a alguns dos episódios que lhe apresentei, envolvendo tarefas supostamente realizadas por alunos. Em relação, por exemplo, aos episódios 7 e 9[1], não teve dúvidas em considerar que o aluno estava a fazer Matemática nas respostas deu. Apreciando o primeiro, disse que o aluno "fez bastante mais do que [se] tivesse decorado o teorema de Pitágoras e o despejasse ali" *(entrev. 2, p. 32)* e, face ao segundo episódio, sublinhou que o aluno "não se limitou a aplicar a regra prática" *(entrev. 2, p. 33)* mas que também utilizou vários conceitos.

Apresentando algumas razões para explicar a ideia que muitos professores do ensino superior têm sobre a má preparação matemática dos alunos que recebem, Maria da Graça mencionou a desarticulação entre esse nível de ensino e o ensino secundário — "muitas das coisas que lá se aprendem não têm nada a ver com o que se aprende aqui, é tudo muito... diferente" *(entrev. 2, p. 15)* —

---

[1] Anexo 4.

referindo ainda a forma muito dependente como o aluno desenvolve o trabalho no ensino secundário e o papel que o professor tem nisso:

> "Nós pecamos por andar com os meninos às costas... ou ao colo, melhor. Nós fazemo-lhes a papinha toda, nós ensinamo-lhes o B A BA (...). Ajuda[mo]-los em tudo e faze[mo]-lhes tudo igual e, sei lá, se for preciso na véspera dos testes, fazemos exercícios parecidos ou iguais aos que estão no teste, e isso."
>
> *(entrev. 2, p. 15)*

Em sua opinião, os professores procedem deste modo "para tentar diminuir o insucesso"*(entrev. 2, p. 15)*, o que não tem dado muito resultado e tem conduzido a que os alunos manifestem dificuldades quando têm que trabalhar por si sós e, particularmente, quando passam para o ensino superior.

O cálculo. Como vimos, é o trabalho com conceitos que dá à Maria da Graça o sentimento de algum envolvimento em actividades matemáticas, o que acontece predominantemente nos anos terminais da Escola secundária. Nos primeiros anos, disse que trabalha essencialmente o cálculo, enquanto que nos anos mais avançados lida com conceitos mais elaborados e os alunos não trabalham apenas com regras. Já na segunda entrevista, a professora explicou que isto acontece porque os constrangimentos curriculares nos anos iniciais assim o obrigam:

> "Conforme as coisas têm estado até aqui, com o programa como ele tem estado, no fundo, o que é que a gente faz, a nível do unificado e do preparatório? Não é mais que trabalhar cálculos... regras. Eles aprendem regras para somar, regras para multiplicar, regras para isto, regras para aquilo, [e] mal têm tempo de dar outras coisas que são aquelas que lhes podem proporcionar raciocínios... mais evoluídos, ou pelo menos um raciocínio mais matemático."
>
> *(entrev. 2, p. 19)*

De qualquer modo, o cálculo parece ocupar um lugar importante na visão que a professora manifestou da actividade matemática. Perante um episódio onde se apresentavam três aspectos da actividade matemática — demonstrar, resolver problemas e calcular[1] — Maria da Graça reagiu do seguinte modo.

[1] Anexo 4, episódio 1.

Concordou com o primeiro, embora ressalvasse que se pode fazer Matemática "sem se estar propriamente a provar coisas"; também concordou com o segundo, reafirmando que considera os problemas, "no sentido de factos concretos", como a base da Matemática, embora, posteriormente, ela se possa desenvolver "independentemente dos problemas que lhe deram origem" *(entrev. 1, p. 42)*; e, sobre o último aspecto exprimiu-se assim:

> "Eu sou a defensora dos cálculos, não é (riu-se)? 'Não se pode certamente ser matemático sem saber fazer cálculos' [frase do episódio]. Pois, eu isso acho que realmente é uma realidade. 'Um matemático por essência e por destino, não se pode dispensar a tal' [frase do episódio]. Bem, isto (...) talvez numa fase... de desenvolvimento superior da Matemática... os cálculos... possam ser mais reduzidos. Mas pa[ra] todos os efeitos, eu acho que não se pode... Pensar em Matemática, sem pensar cálculos... Eu acho que é cortar-lhe uma parte dela porque acho que a Matemática é tudo. É os cálculos e são os conceitos. Para se elaborar os conceitos, nós temos que ter cálculos. Daí sai a minha opinião sobre os cálculos (riu-se)."
>
> *(entrev. 1, p. 42)*

Todavia, considerou o cálculo a parte menos bonita da Matemática — "[es]tar ali a fazer cálculos... de empreitada, não é assim uma coisa que tenha assim grande... beleza" *(entrev. 1, p. 47)* — preferindo a parte mais conceptual e com mais conexões entre os assuntos matemáticos: "p'ra mim... a parte bela da Matemática, (...) [é quando] chegarmos às funções e às parábolas e isso, eu digo assim, 'agora vamos entrar na parte bonita da Matemática, vamos entrar naquela parte em que a gente vê relacionar umas coisas com as outras, pode misturar tudo' (...); tudo o resto são mais contas que são precisas, que são absolutamente necessárias, mas que... não têm aquela... ligação" *(entrev. 1, p. 47)*. Na opinião de Maria da Graça, no entanto, os alunos de um modo geral não têm idêntico sentimento, tendo dito que eles chegam a preferir o cálculo, mesmo com contas extensas. Referindo-se a um teste que realizou sem muito cálculo e "mais à base de coisas em que é preciso pensar" *(entrev. 2, p. 2)*, contou que os alunos reagiram mal e tiveram resultados muito negativos.

Do seu ponto de vista, os alunos vêem a Matemática como uma disciplina "das mais difíceis (...) [e a que] lhes dá mais trabalho" *(entrev. 2, p. 4)* mas, na opinião de Maria da Graça, o que mais caracteriza a imagem dos alunos é o facto de a Matemática para eles ser números e cálculo. Questionada sobre as razões de se ter instalado essa imagem nos alunos, a professora respondeu assim:

> "O que é que eles têm visto sempre na Matemática ao longo dos tempos? É só números, trabalhar com contas... é fazer contas, é fazer cálculos. Todo o programa até aqui tem sido sempre vocacionado nisso, trabalho com cálculos, técnicas de cálculo. Têm uma parte de Geometria [que] eles não gostam. Eles não gostam de Geometria porque [a] Geometria foge-lhes às contas (...) tudo o que sai do âmbito das contas e dos números para eles...
>
> *(entrev. 2, p. 5)*

Para tentar contrariar o desenvolvimento desta imagem nos alunos, Maria da Graça defendeu que o ensino da Geometria deveria iniciar-se muito cedo e que logo desde a Escola Primária, as várias "vertentes" da Matemática, como lhe chamou, "as contas", mas também "os problemas" e o "raciocínio" *(entrev. 2, p. 7)*, deveriam começar a ser trabalhadas. Confessou no entanto que ela própria sente dificuldade em desenvolver trabalho nesse sentido, mencionando também a sua dificuldade em propor actividades criativas: "é uma das falhas que sinto, é que faço muito pouco [desse tipo de actividades]; não sei muito bem fazer isso [e] não faço porque não sei fazer" *(entrev. 1, p. 55)*.

As aulas de Matemática

A escolha para a realização da primeira série de observações recaiu, de comum acordo, sobre uma turma do 10° ano, escolhida pelo facto de, nas aulas que se iriam seguir, a professora começar um novo capítulo do programa. A sequência inicial de observações teve lugar poucos dias depois da primeira entrevista e a seguinte decorreu dois meses mais tarde, também numa turma do 10° ano, depois da segunda entrevista. Uma e outra incidiram sobre quatro aulas consecutivas no período de uma semana.

Como estava combinado, o encontro com a professora foi sempre na sala de docentes da escola. Para a primeira aula, encontrámo-nos decorria ainda o intervalo que antecedia a aula e, por sugestão sua, ficámos a aguardar o toque de entrada. "Nesta escola"[1], disse-me na altura, "não vale a pena ir antes", explicando que, existindo um 2º toque, os alunos tendem a esperar por ele para se dirigirem para a sala. A professora aparentou um certo desacordo com a existência deste segundo toque que, em sua opinião, serve apenas para os empregados marcarem falta ao professor. Pouco depois de se ouvir a campainha de fim de intervalo, encaminhámo-nos para a sala que ficava noutro pavilhão. À entrada a professora foi levantar a chave da sala entre as que uma empregada tinha espalhadas sobre uma mesa e que os professores que entravam iam levantando, 'furando' entre os muitos alunos que rodeavam a funcionária. A aula era no primeiro andar e junto à porta aguardavam já alguns estudantes.

Maria da Graça entrou à frente seguida de alguns alunos. Depois entrei eu e os restantes que se foram sentando quase sempre dois a dois (rapazes com rapazes e raparigas com raparigas), excepto três que ficaram sozinhos, todos eles rapazes. Sentaram-se predominantemente na metade anterior da sala e do lado esquerdo, em frente da mesa da professora. Pouco depois ouviu-se o segundo toque e os trabalhos começaram com dez alunos presentes.

A professora abriu a aula, sentada à sua secretária, ditando o sumário e o número da lição. "Ora vamos lá escrever o sumário, lição 70", disse, anunciando ainda que, como já tinha avisado, ia iniciar um novo capítulo. Entretanto, entraram os três alunos que faltavam. Os alunos escreviam, todos em silêncio. Nas aulas que se seguiram, salvo um ou outro pormenor, tudo decorreu de modo semelhante.

Também na segunda série de observações, os encontros com a professora foram na sala de docentes de onde saíamos para a aula, alguns minutos depois do toque de entrada. Entrávamos juntos na sala, às vezes acompanhados por alguns alunos. Os restantes alunos entravam logo a seguir, com maior ou menor intervalo de tempo, nunca muito grande. Em geral, o segundo toque ouvia-se ainda a aula não tinha propriamente começado.

No final de cada uma das aulas observadas decorreu uma entrevista com a professora sobre a observação efectuada. A parte que a seguir apresento foi

[1] As citações da professora utilizadas aqui e no ponto seguinte, foram extraídas das notas de campo, recolhidas a partir de conversas informais e de entrevistas curtas realizadas durante os períodos de observação de aulas.

redigida a partir dos elementos recolhidos nas observações e nas referidas entrevistas. Num primeiro ponto — As turmas — dão-se alguns elementos do contexto físico e algumas características das turmas em que as observações decorreram. Seguem-se depois, em dois outros pontos — Estrutura e sequência das aulas e Ambiente de aula e interacções — elementos sobre a forma como as aulas decorreram, na sua organização, desenvolvimento e ambiente de trabalho. Por fim, num último ponto — A Matemática na aula — incluem-se os aspectos considerados mais significativos relativos às tarefas e actividades desenvolvidas.

As turmas. As duas turmas onde decorreram as observações pertenciam ao turno da tarde, uma vez que a professora só leccionava nesse período. A primeira tinha as aulas de Matemática predominantemente na primeira metade do horário (entre as 13.30 e 16.30) e só em dois dias as aulas decorriam na mesma sala, um antigo laboratório, por sinal demasiado grande e algo desproporcionada para a dimensão da turma. Alguns alunos, pelo que disse Maria da Graça, tinham tendência a 'espalhar-se' pela sala, sentando-se às vezes muito atrás, longe do quadro. Na verdade, isso veio a verificar-se durante as observações, tendo a professora pedido aos alunos para se sentarem mais à frente. As outras duas salas eram mais pequenas, não dando a sensação de desconforto que a outra dava pela sua dimensão. Em todas elas o mobiliário e a sua arrumação eram os tradicionais. As mesas e cadeiras estavam dispostas em filas, onde os alunos se podiam sentar dois a dois, e não havia outro equipamento visível para além do quadro preto, com painéis de afixação ao lado. Em certos casos, a visibilidade no quadro era muito prejudicada pelo reflexo da luz exterior, situação que a professora tentou minimizar, baixando os estores e acendendo a luz.

Tratava-se de uma turma da área de gestão com muito poucos alunos — treze — pois incluía apenas os que tencionavam prosseguir estudos no ensino superior. Havia oito raparigas e cinco rapazes. Maria da Graça considerava-a uma turma "muito fraquinha" e com pouco interesse nas aulas. Conversando sobre a turma, disse também que os alunos em geral eram pouco participativos e tinham pouca vontade de trabalhar, sendo alguns deles "muito faladores" e com facilidade em entrarem na "brincadeira". Por tudo isto, deu a entender não ter grandes expectativas relativamente a estes alunos, não lhes antevendo um futuro promissor nos estudos: "não vejo que possam fazer grande coisa".

Na segunda turma, igualmente um 10° ano, as aulas de Matemática realizavam-se entre as 13.30 e 17.30, normalmente também em salas diferentes, todas elas com mobiliário e arrumação idênticos aos da outra turma. As salas eram bem iluminadas pela luz que entrava pelas janelas mas tinham todas um ar 'despido', com as paredes muito sujas até à altura dos joelhos. Também os tampos das mesas, em geral, estavam sujos e muito riscados.

Tratava-se de uma turma do agrupamento 4, o mesmo da turma em que decorreu a primeira série de observações, só que neste caso constituída por cerca de 25 alunos, a maioria dos quais raparigas. Nas aulas observadas, os alunos estiveram quase todos presentes (faltaram, quando muito, dois ou três alunos em cada aula).

A professora referiu-se a esta turma como sendo "razoável", com alunos "muito jeitosos". Dividiu os alunos em três grupos, um, constituído essencialmente por raparigas com muito boas classificações nos testes mas que não são particularmente participativas na aula; um outro, também quase só de raparigas que, sem terem notas muito boas, considerou "altamente interessadas", "muito mais participativas" e gostando de "fazer coisas na aula"; e, um terceiro grupo constituído por alguns rapazes que caracterizou dizendo que "não fazem nada, literalmente nada". É uma turma com apenas um aluno repetente, embora vários venham com nível 2 do 9° ano, e todos eles são pela primeira vez alunos da professora.

Estrutura e sequência das aulas. Os dois conjuntos de aulas observadas foram globalmente muito semelhantes do ponto de vista da sua estrutura e sequência. Na primeira aula de cada um dos conjuntos começou a ser estudado um assunto novo, nas duas aulas seguintes o estudo do assunto progredia com a abordagem de outros tópicos, e, a última aula de ambos foi dedicada à resolução de exercícios sobre o assunto trabalhado. A professora 'abria' a lição indicando o seu número, ditava o sumário da aula, e marcava as faltas. As aulas, em geral, terminavam com a marcação do trabalho para casa ou com a correcção de trabalhos pendentes.

Todas aulas em que houve progressão no assunto tinham basicamente a mesma estrutura, descrita pela seguinte sequência: revisão — novo assunto — exercícios sobre o assunto tratado ou correcção do trabalho de casa. O momento inicial de revisão constituía uma espécie de introdução ao assunto do dia e era usado para recordar noções ou terminologia já estudadas em anos precedentes ou os tópicos trabalhados na aula anterior (numa das aulas, a correcção do trabalho de casa cumpriu este papel).

Nestas aulas, os diferentes momentos da sequência não se distinguiam significativamente quanto à natureza das interacções e das actividades desenvolvidas, sempre muito semelhantes, quer se tratasse do momento de revisão, do trabalho com o novo assunto, ou dos exercícios de aplicação. Na verdade, as aulas decorriam numa alternância entre momentos de intervenção da professora e momentos de intervenção dos alunos, quase sempre por solicitação da professora, alternância que também se verificou nas aulas em que o trabalho foi apenas sobre assuntos já abordados. Quando a professora intervinha, em geral dirigia-se à turma como um todo, gerando-se um diálogo que a professora desenvolvia com base nas perguntas que fazia e nas respostas que ia ouvindo. Deste modo, recordava as noções que achava convenientes e procedia à apresentação de novos assuntos.

Da primeira aula observada, que abria o capítulo da Geometria Analítica com o estudo dos referenciais cartesianos e a representação de pontos e rectas no plano, foi feito o seguinte registo que ilustra o que acaba de ser dito:

Recordando noções

Para recordar a noção de referencial cartesiano, a professora desenha no quadro um sistema de eixos e, apoiando-se numa sequência de perguntas que dirige à turma vai informando (ou recordando) algumas características deste referencial e os termos que se utilizam (...):

Professora — Um referencial cartesiano é constituído por dois eixos [já desenhados]. Que posição têm?

Ouvem-se alguns alunos a responderem mas não se entende o que dizem.

Professora — Não ouvi nada.
Alunos — Perpendicular [alguns alunos em voz baixa].

Professora — Não tinha ouvido. Vocês sabem os nomes, eixo dos... [interrompe esperando que algum aluno complete].

Deste modo, com auxílio das perguntas que vai fazendo e das respostas que vai ouvindo, a professora explica o que é um referencial cartesiano. Refere ainda a sua constituição — "em quantas partes está dividido? como se chamam?" — e o facto de se utilizar a mesma unidade na sua divisão. Os diversos termos (por exemplo, abcissas, ordenadas, coordenadas, quadrantes), vão sendo referidos, alguns pelos alunos, outros pela professora (quando os alunos não respondiam), que os escreve no quadro, à medida que surgem. Terminada esta explicação, inicia o período que dedicou à representação de pontos no referencial.

(registo de aula, 28 de Fevereiro)

Introduzindo um novo assunto

Para tratar a representação de rectas verticais, a professora apresenta no quadro 4 pontos, dados pelas coordenadas, todos com a mesma abcissa — (-3, 2), (-3, 0), (-3, 5) e (-3, 1) — e pede aos alunos que os representem num referencial nos seus cadernos: "vamos lá marcar este pontos todos e depois ver o que é que dá".

Já entre as mesas, ouve-se a professora dizer a um aluno: "O que concluis? [Os pontos] não têm nada, nada de comum? O que é isso do -3 nesses pontos? Como se chama a 1ª coordenada de um ponto". Pouco depois, dirigindo-se a toda a turma diz "todos esses pontos têm a mesma abcissa" e pergunta: "quem é que ainda não foi ao quadro marcar pontos?". Entre os alunos que se identificaram a professora escolhe um que vai ao quadro fazer a representação e pergunta:

Professora — E se eu pedisse para marcar o ponto (-3, 50).

Ouvem-se alguns alunos a rir.

Um aluno — Ficava lá para cima.

Professora — Não ficava na mesma linha? Então posso dizer que estes pontos definem, estão situados na mesma recta (deu-lhe então o nome de recta vertical, referindo também as rectas horizontais).

A professora introduz depois a notação deste tipo de rectas pelas suas equações, propondo exemplos — $x = 4$, $x = 0$, $x = 2$ — que pede a alunos diferentes para irem representar sucessivamente no quadro.

(registo de aula, 28 de Fevereiro)

Nos momentos em que se procedia à realização e correcção de exercícios, sobre assuntos já estudados, a aula desenrolava-se com períodos em que se alternavam tarefas realizadas pelos alunos no seu lugar e no quadro, aqui feitas por um aluno ou pela professora. Estes períodos eram de duração variável e o trabalho no quadro destinava-se sempre à correcção de um exercício. Nestes momentos, a natureza das actividades e das interacções eram semelhantes às que ocorriam nos momentos anteriormente mencionados, como se exemplifica no registo seguinte:

Corrigindo exercícios

[A professora] "Vamos corrigir trabalhos que andam por aí. Dúvidas?". Vários alunos dizem ter dúvidas num determinado exercício do livro, na última alínea: era dada uma curva num referencial e pedia-se os valores de x para determinados valores de $f(x)$. A professora manda abrir o livro "para não ter que fazer as figuras" e com o livro na mão lê o enunciado. Percorre as alíneas todas do exercício, perguntando-as a um aluno e corrigindo o que ele vai dizendo. Por exemplo:

Professora — O que é que quer dizer $f(x) > 3$?
Aluno — Maior que 3.
Professora — [Maior] o quê?
Aluno — A imagem maior que 3.
Professora — Então agora a última [alínea]: $-2 < f(x) \leq 0$ (no quadro). O -2 pode ser imagem?
Aluno — Mas o zero pode.

A correcção é feita oralmente, o aluno vai dizendo "aberto", "fechado" e a professora também (referindo-se ao intervalo pretendido no exercício).

(registo de aula, 29 de Abril)

Ambiente de aula e interacções. Também em relação a estes aspectos, não foram observadas diferenças significativas nas duas turmas. Os trabalhos das aulas começavam logo depois da escrita do sumário e decorriam sem interrupções, nem perturbações de carácter disciplinar, num ambiente de trabalho em que a professora e os alunos manifestavam à-vontade e uma relação de alguma informalidade. A interacção dominante foi entre a professora e os alunos, quase sempre sob a forma de um diálogo que estabelecia dirigindo-se à turma como um todo. Neste diálogo, os alunos interagiam com a professora, em geral por solicitação desta, respondendo às questões colocadas que não eram dirigidas a nenhum aluno em particular. Qualquer dos registos apresentados no ponto anterior ilustra esta situação, também visível no registo a seguir apresentado, referente ao momento de uma aula em que a professora procura sintetizar o estudo acabado de fazer:

Diálogo com a turma

A professora pede que os alunos usem o livro (p. 108) e chama a atenção para uma figura onde estão várias parábolas representadas num referencial: "a roxo está $y = 2x^2$, a amarelo está $y = x^2$". Com base nesta figura tenta que os alunos tirem algumas conclusões.

Professora — todas estas funções ax^2 têm algo de semelhante. Têm o vértice situado aonde?

Alunos — Na origem.

Professora — Têm o vértice na origem. Vejam lá outras coisas.

Um aluno (o que está a meu lado) — A amplitude vai aumentando.

O aluno refere-se à abertura da parábola e a professora então diz — "quanto maior é o a" — e depois continua:

Professora — Mais coisas que podem concluir daí?

O mesmo aluno — Quando a é menor que zero a curva fica simétrica em relação ao eixo dos XX.

Professora — Vamos lá explicar melhor.

A professora usa então o termo concavidade, relacionando a sua orientação com o sinal do coeficiente a.

(registo de aula, 28 de Abril)

Neste tipo de situações de 'diálogo com a turma', de um modo geral os alunos aparentavam atenção aos trabalhos, parecendo acompanhar o que a professora dizia ou fazia, por vezes mesmo em silêncio, e iam respondendo às suas perguntas e realizando as tarefas que ela ia propondo. Aconteceram também situações de 'diálogo individualizado' da professora com um aluno determinado, quase sempre junto ao quadro e geralmente a propósito da resolução de um exercício. O registo que a seguir apresento pretende dar uma ideia de como se processava esse tipo de diálogos.

Diálogo individualizado

> No quadro, o aluno desenha um referencial, escreve $y = 3x^2 - 12$ e fica à espera. A professora lembra-lhe que tinha estado distraído na aula anterior (a pôr pingos nos olhos), escreve $y = ax^2 + b$ e pergunta-lhe: "o que vimos na aula passada?".
>
> O aluno não diz nada e então a professora escreve $y = 3x^2$ enquanto lhe pergunta... "é muito diferente?". O aluno parece recordar vagamente, dizendo algo como "esta tem o vértice no zero" (fazendo o gesto). A professora depois pergunta-lhe pela orientação da concavidade. O aluno não sabe (diz uma coisa e depois outra). A professora esclarece — "a concavidade está virada para cima e o vértice está na origem" — e retoma o exercício inicial "como será $y = 3x^2 - 12$?". Como o aluno não progride a professora sugere a marcação de pontos usando uma tabela que ela própria constrói. (...) Tudo se passa no quadro, com a professora perto do aluno e dirigindo-se a ele que vai respondendo em voz baixa. Na sala os alunos estão mais ou menos silenciosos, a maioria olha para o que se passa no quadro mas há alguns que parecem não estar a acompanhar.
>
> *(registo de aula, 2 de Maio)*

Um outro tipo de situações ocorria quando era pedido aos alunos que realizassem alguma tarefa no caderno e lhes era dado algum tempo para isso. Quando isto acontecia, a professora afastava-se do quadro e acercava-se dos alunos, por iniciativa própria ou quando era solicitada, para acompanhar o trabalho que realizavam, responder às solicitações e dar indicações acerca da tarefa em questão. Veja-se, por exemplo, o seguinte registo, correspondente ao momento de uma aula, logo após a indicação da tarefa a realizar pelos alunos:

> A professora começa então a circular pela sala, atende alunos que a chamam, dá achegas e ela própria intervém por sua iniciativa perante algo que não estará muito correcto ou perante alguma dificuldade ou bloqueamento que terá verificado em algum aluno. Por exemplo, junto a uma aluna que a tinha chamado, ouve-se a professora dizer coisas como: "não está muito longe", "o que é que isto quer dizer?" "compare com os outros" (referia-se a gráficos de aulas anteriores).

> Por diversas vezes, a professora recomenda que os alunos comparem o que estão a fazer com o que se tem vindo a estudar (menciona a localização do vértice das parábolas, a orientação das concavidades, a abertura). Também por diversas vezes se ouve a professora pedir aos alunos que expliquem o que fizeram dizendo frases como: "expliquem porquê", "como é que sabia que a concavidade era para cima?", "como é que sabia que a abertura era esta e não outra qualquer?", ou, "se me disseres o que é isso? (aqui atendia um aluno que a chamara dizendo que já tinha feito o exercício). (...)
> Os alunos parecem concentrados e o ambiente geral é calmo e quase sem ruído. A maioria está entregue à realização do exercício proposto, alguns trocando impressões com o colega do lado (ou imediatamente atrás ou à frente). Esta troca de impressões vai se generalizando a mais alunos e o ruído que se começa a ouvir resulta disto mesmo, mantendo-se um ambiente geral de trabalho.
>
> *(registo de aula, 4 de Maio)*

Situações como esta não foram frequentes, e verificaram-se sobretudo nas últimas aulas de cada período de observação que, como se disse, foram dedicadas à resolução de exercícios. O registo transcrito diz respeito à última aula observada e dá também ideia de um momento de maior interacção entre os alunos. Na verdade, embora a interacção dominante tenha sido entre os alunos e a professora, em algumas situações, os alunos vizinhos também interagiam entre si, em geral a propósito da tarefa que estavam a realizar. Esta interacção, podemos dizer, foi quase sempre espontânea, pois apenas na aula agora referida a professora recomendou explicitamente que o trabalho fosse realizado por pares de alunos.

A Matemática nas aulas. Na primeira das turmas observadas o tema estudado foi a Geometria Analítica e na segunda estudou-se a função quadrática. Na Geometria, durante as quatro aulas, foram trabalhados os seguintes tópicos: representação de pontos, rectas e regiões de um plano num referencial cartesiano. As rectas estudadas foram rectas em posições particulares — rectas horizontais, verticais e bissectrizes dos quadrantes pares e ímpares — e as regiões do plano eram regiões delimitadas por este tipo de rectas. No estudo das rectas e das regiões do plano, trabalharam-se as representações gráficas e analíticas e fizeram-se traduções de um para outro tipo de representação. Na função quadrática, foi feito o estudo de diferentes parábolas — $y = ax^2$, $y = ax^2 + b$ e $y = a(x-h)^2$— no que se refere ao vértice, concavidade e abertura em cada situação, tendo também sido feito, em alguns casos, o estudo da monotonia, contradomínio, zeros, máximos e mínimos da função respectiva.

As tarefas. Na aula que iniciou a Geometria Analítica, usando um desenho de um referencial no quadro, a professora foi recordando, com perguntas dirigidas a toda a turma, as características do referencial cartesiano e a terminologia e notação utilizadas.

A representação de pontos foi tratada com exemplos de pontos fornecidos pela professora que os alunos marcavam num referencial ou, mais raramente, através de pontos representados no referencial de que a professora pedia as respectivas coordenadas. Os exemplos cobriam pontos em situações diferentes, relativamente aos eixos do referencial, aos quadrantes e às suas bissectrizes.

Para introduzir a representação de rectas verticais (ou horizontais), a professora pediu a representação de conjuntos de pontos com a mesma abcissa (ou ordenada), a partir da qual apresentava a respectiva equação e notação em termos da teoria de conjuntos. No caso das rectas verticais, por exemplo, começou por pedir que os alunos representassem os pontos $(-3,\ 2)$, $(-3,\ 0)$, $(-3,\ -5)$ e $(-3,\ 1)$ e, chamando a atenção para a abcissa comum, introduziu a equação $x = -3$. Depois de mais exemplos do mesmo tipo (com $x = 4$, $x = 0$, $x = 2$), a professora introduziu a notação da teoria de conjuntos, por exemplo $\{(x, y) \in R^2 : x = 4\}$. As rectas horizontais e as bissectrizes dos quadrantes do referencial foram abordadas de modo idêntico. Num ou noutro caso, dada uma determinada recta (horizontal, vertical, ou bissectriz) graficamente representada, a professora pedia a respectiva equação.

A representação de regiões do plano foi abordada através de exemplos propostos pela professora, em que as regiões eram delimitadas por rectas horizontais, verticais, ou bissectrizes dos quadrantes do referencial, por exemplo:

$$\left\{(x,y) \in R^2 : y \geq 2\right\}$$

$$\{(x,y) \in R^2 : x \geq 4 \wedge y \leq 5\}$$

$$\{(x,y) \in R^2 : y < x \wedge x \geq 2\}$$

ou ainda,

$$\{(x,y) \in R^2 : |x| \leq 1 \wedge |y| < 3\}$$

Foram tratados casos de regiões abertas e fechadas, bem como de regiões constituídas por partes disjuntas. A maioria das tarefas consistia em traçar num gráfico a região correspondente a uma condição dada, embora também fosse pedido aos alunos que escrevessem as condições que correspondiam a determinada região graficamente representada. Por exemplo, identificar a condição relativa à região marcada no gráfico que apresento na figura 1.

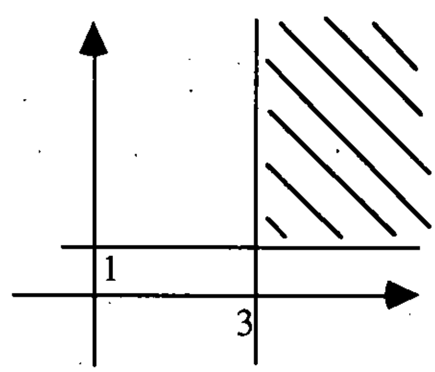


Figura 1

A propósito da realização destas tarefas, foram feitas leituras das expressões das condições (em geral pela professora) e recordados os significados de conjunção e disjunção de condições (em associação com a teoria de conjuntos), bem como o significado de módulo, no caso, de uma variável. No quadro, os alunos desenhavam à mão um referencial (identificavam e graduavam os eixos e indicavam a sua orientação), traçavam as rectas e marcavam as regiões.

O estudo da função quadrática processou-se, como disse, com parábolas, $y = ax^2$, $y = ax^2 + b$ e $y = a(x-h)^2$, analisando, em relação aos vários parâmetros, a localização do vértice e orientação da concavidade e a variação da abertura. A abordagem inicial foi feita a partir de referências a situações da vida real, utilizando figuras de um livro que a professora mostrava aos alunos. O estudo mais específico iniciou-se com base no gráfico da parábola $y = 2x^2$ que a professora pediu aos alunos para desenharem, marcando pontos que determinavam atribuindo valores a x. Em seguida propôs que os alunos esboçassem outra parábola do mesmo tipo mas de coeficiente a negativo, $y = -2x^2$. Recorrendo a estes gráficos e a outras parábolas de vértice na origem, desenhadas em figuras do livro de texto, a professora procurou que os alunos relacionassem a abertura da parábola e a orientação da concavidade com a grandeza e sinal deste coeficiente.

O estudo das parábolas de equação $y = ax^2 + b$ foi conduzido a partir da parábola $y = ax^2$, recorrendo a modelos em cartolina que correspondiam a parábolas diferentes: $y = 0,4x^2, y = 1/2x^2, y = -1/2x^2$. Sobrepondo cada modelo ao referencial desenhado no quadro, e deslocando-o de acordo com a posição do vértice, obtinham-se as parábolas: $y = 0,4x^2 + 2$, $y = 1/2x^2 - 3$, $y = -1/2x^2 + 2$, a primeira efectuada pela professora e as outras por alunos. Para além da posição do vértice, de acordo com o termo de grau zero, era referida a orientação da concavidade (relacionando-a com o sinal do coeficiente de x^2). Para uma das parábolas a professora pediu a indicação dos zeros e o contradomínio respectivos, e apresentou depois o contradomínio para o caso geral, para valores positivos e negativos do coeficiente de x^2. Num caso — $y = 3x^2 - 12$ — a professora pediu também o cálculo analítico dos zeros.

Recorrendo de novo aos modelos em cartolina, e deslocando-os ao longo do eixo dos XX de um referencial desenhado no quadro, a professora abordou o último caso, $y = a(x-h)^2$. A partir da expressão geral, que a professora escreveu no quadro, representou também o caso geral do vértice das parábolas nesta situação — V (h, 0) — e pediu a indicação dos seus zeros e contradomínio. Ainda a respeito destas parábolas, a professora pediu que os alunos se pronunciassem sobre a monotonia da função respectiva, em referência directa com o vértice e a orientação da concavidade. Depois disto, os alunos esboçaram gráficos correspondentes a funções quadráticas — por exemplo, $y = 0,4x^2 (x-2)^2 + 5$ e $y = x^2 - 5x + 6$ — identificaram directamente da expressão da função as coordenadas do vértice da parábola e, quando foi necessário, por sugestão da professora, transformaram a expressão dada numa outra que lhes permitisse a obtenção directa dessas coordenadas.

Começando pelo mais simples. Sempre que se tratava de introduzir um novo assunto ou tópico na aula, a professora começava com situações que antevia de menor complexidade ou dificuldade para os alunos, e progredia no assunto trabalhando casos de complexidade crescente. Foi assim logo na aula em que iniciou a Geometria Analítica pedindo a marcação de pontos dados pelas suas coordenadas num referencial cartesiano. Os primeiros pontos foram pontos vulgares — (2, 5), (–3, –4), (– 2, 3), (1, –1) — depois pediu aos alunos a marcação de pontos em que uma das coordenadas era nula — (0, 3) e (–2, 0) — e, por fim, deu um ponto — (– 2, 2) — e pediu as coordenadas dos pontos simétricos, sucessivamente em relação ao eixo dos XX, ao eixo dos YY e à origem.

Em relação à representação de rectas, a professora também começou com as mais simples, rectas verticais e horizontais — por exemplo, $x = -3$, $y = 1$ — passando depois para as bissectrizes dos quadrantes do referencial, tratando em primeiro lugar a dos quadrantes pares. O estudo das regiões do plano foi feito começando com regiões limitadas apenas por rectas horizontais ou verticais (as bissectrizes seriam trabalhadas depois). Primeiro uma região limitada apenas por uma recta, depois por duas e em seguida por quatro, numa situação que envolvia módulos em ambas as variáveis e intervalos abertos e fechados: $\{(x, y) \in R^2 : |x| \leq 1 \wedge y < 3\}$. Por fim foram usadas combinações destas várias situações que envolviam também as bissectrizes entretanto estudadas, por exemplo, $\{(x, y) \in R^2 : y \leq x \wedge x \geq 2\}$. Este tipo de abordagem pode ser ilustrada com o estudo das regiões do plano, em que a professora começou por resolver no quadro alguns casos simples (semi-planos limitados por rectas horizontais, por exemplo), marcando as regiões e escrevendo as condições correspondentes. Desenhou no quadro a figura

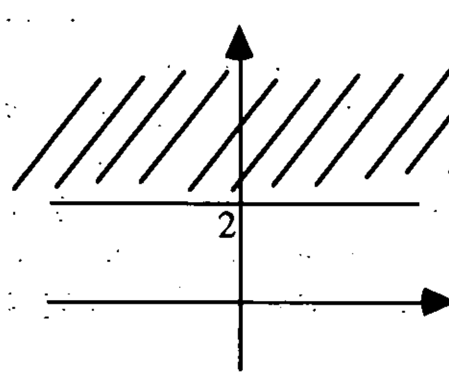


Figura 2

e perguntou:

Professora — Então agora se eu quisesse [isto]? (referia-se ao tracejado que fazia como mostro na figura 2).

Escreveu de seguida a condição $\{(x,y) \in R^2 : y \geq 2\}$. Depois de outro exemplo, pediu que os alunos traçassem as regiões correspondentes a outras condições.

Professora — Então já temos algumas regiões definidas e maneiras de [as] definir. Agora vou vos dar as condições e vocês identificam as regiões [escreve no quadro]:

$\{(x,y)R^2 : x \geq 4y \wedge \leq -5\}$

$\{(x,y)R^2 : y \geq 2 \wedge x \leq 2\}$

Professora — Façam no caderno.

(registo de aula, 2 de Março)

Também o estudo da função quadrática começou pela situação de menor complexidade, uma parábola dada por $y = ax^2$ com o coeficiente a positivo e inteiro. Depois, foi estudado o caso em que o coeficiente a é negativo, a que se seguiram parábolas dadas por equações mais complexas. Em primeiro lugar, parábolas $y = ax^2 + b$, com coeficiente a inteiro ou decimal, positivo ou negativo, e o parâmetro b inteiro, e a seguir parábolas $y = a(x-h)^2$, depois também estudadas a partir de expressões do tipo $y = ax^2 + bx + c$.

Ilustrando. Na introdução de um novo assunto ou em tarefas sobre assuntos já trabalhados, a professora, tendencialmente, começava ela própria por realizar, total ou parcialmente, a tarefa em questão, ilustrando assim o modo de proceder que esperava dos alunos em tarefas subsequentes. Esta situação aconteceu, por exemplo, nas aulas de Geometria Analítica quando se estudaram as regiões do plano e também em algumas situações no estudo da função quadrática. Assim, no início do estudo das regiões do plano, foi a professora que resolveu no quadro os primeiros exemplos, marcando as regiões e escrevendo as condições correspondentes, pedindo depois que os alunos realizassem outros exercícios um pouco mais complexos, mas em cuja resolução se podia utilizar parte do que a professora tinha acabado de fazer (veja-se o registo de aula na página anterior).

Ainda no estudo das regiões do plano, numa aula de resolução de exercícios, a professora resolveu integralmente o primeiro exercício, realizando-o no quadro ao mesmo tempo que ia colocando, de passo para passo, questões aos alunos. No segundo exercício, em que se pedia para determinar as condições que definem as regiões a tracejado na figura 3,

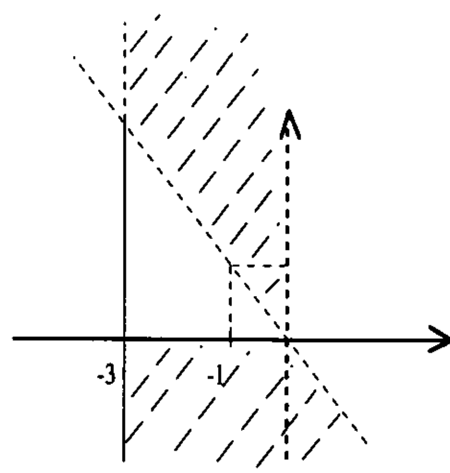


Figura 3

a professora resolveu, desta vez, apenas uma parte do exercício, pedindo aos alunos que o terminassem. A resolução foi orientada do mesmo modo, passo a passo e colocando questões aos alunos, como dou conta no registo seguinte:

> Professora (dirigindo-se a toda a turma) — São duas partes distintas ou estão ligadas uma com a outra? Sim ou não? Podemos considerá-las completamente distintas? (referia-se à figura 3)

Não se ouvem respostas da parte dos alunos.

> Professora — Estou a falar com vocês. Podemos trabalhá-las como completamente distintas. Vamos chamar a uma *A* (escreve *A* na parte tracejada superior). Qual é a equação daquela recta (aponta a bissectriz dos quadrantes ímpares)?
>
> Um aluno — *y* igual a *x*.
>
> Professora — *y* igual a *x*. Qual é a equação desta [aponta a recta $x = -3$]?
>
> Dois alunos (sucessivamente) — *x* igual a menos três.
>
> Professora — E esta (aponta para o eixo dos YY)?

Dois alunos dão cada um a sua resposta, um diz y igual a zero, outro, x igual a zero.

Professora — Não é uma recta vertical? Então é x igual a zero.

Entretanto a professora vai escrevendo as equações no quadro.

Professora — Já temos as rectas que limitam a região A. É uma região fechada ou aberta?

Um aluno — Aberta.

Professora — É aberta porque as linhas estão a tracejado. Então vamos escrever: $x < 0 \wedge x > -3 \wedge y > -x$.

À medida que ia escrevendo cada uma das desigualdades, a professora explicava cada passo: $x < 0$ — "não vou pôr igual porque a linha está a tracejado"; $\wedge x > -3$ — "porque é uma conjunção". Em relação ao último passo — $\wedge y > -x$ — experimenta com um valor de x para verificar se o valor obtido para y está de acordo com a figura.

Professora — A conjunção das condições definem a região A.

(registo de aula, 4 de Abril)

Na sequência do momento de aula de que o registo anterior dá conta, a professora pediu aos alunos que trabalhassem sozinhos sobre a região inferior da figura, recomendando: "sigam exactamente o mesmo, comecem por identificar as rectas e depois [é] a intersecção [das regiões do plano] que as rectas definem" *(registo de aula, 4 de Abril)*.

Percebe-se neste tipo de intervenções da professora, a intenção de mostrar aos alunos o processo a seu ver adequado a tarefa que estes depois irão realizar. Esta intenção, como se disse, também se manifestou nas aulas dedicadas ao estudo da função quadrática e é visível no registo que a seguir apresento:

A professora, em determinado momento, usa várias "parábolas em cartolina" ($y = x^2$, $y = 1/2x^2$, $y = 0,4x^2$...) que vai sobrepondo ao referencial desenhado no quadro chamando a atenção para diferentes aspectos (posição do vértice, orientação da concavidade, abertura).

É nesta altura que, a partir de um exemplo, a professora inicia o estudo de parábolas $y = ax^2 + b$.

Professora — E se eu quiser desenhar $y = 0,4x^2 + 2$? Posso aproveitar esta (refere-se à parábola $y = 0,4x^2$).

Alguns alunos respondem afirmativamente e a professora continua.

Professora — Sim, só que tenho que deslocar 2 unidades.

Pede então a uma aluna que vá fazer isso ao quadro. A aluna marca o ponto $y = 2$ no referencial e coloca correctamente o modelo de cartolina.

Professora — E se fosse $y = 0,4x^2 - 3$?

A mesma aluna volta a fazer bem, colocando a mesma parábola agora com o vértice em $y = -3$.

(registo de aula, 29 de Abril)

Apoios intuitivos. Nos exemplos que propunha, a professora recorreu por vezes a apoios intuitivos, como aconteceu na aula a que o registo anterior se refere. Nessa aula, a professora utilizou parábolas desenhadas e recortadas em cartolina, obtendo modelos para diferentes curvas que podiam ser manuseados no quadro perante a turma, como se exemplifica na figura seguinte:

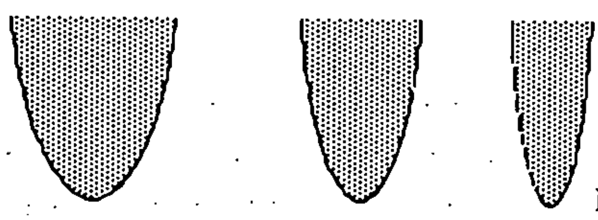


Figura 4

A cada modelo estava associada a expressão analítica da respectiva parábola e, como se percebe no registo de aula referido, a professora usou-os, primeiro para recapitular o estudo já realizado de parábolas $y = ax^2$ e depois para, com simples deslocações efectuadas sobre um referencial desenhado no quadro, introduzir as parábolas dadas por expressões do tipo $y = ax^2 + b$ e $y = a(x - h)^2$.

Logo na introdução do estudo da função quadrática, a professora procurou proporcionar aos alunos algumas bases de carácter intuitivo, fazendo referência, como já foi mencionado, a situações da vida real. É assim que fala no "projéctil que sobe e desce" *(registo de aula, 28 de Abril)*, chegando mesmo a atirar um pedaço de giz ao ar, e mostra várias figuras de um livro que apresenta a toda a turma, apontando com o dedo as figuras pretendidas, ao mesmo tempo que alude ao que nelas está representado: um jacto de água, abóbadas de monumentos, realizações arquitectónicas na Expo 92. Aproveitando as figuras que mostra, a professora faz notar a simetria da parábola, dizendo que se a folha do livro fosse dobrada de determinada maneira (faz o gesto) as duas metades da parábola coincidiriam. A este propósito, vale a pena referir aqui o seguinte episódio de aula.

Depois de ter sido estudada a parábola $y = 2x^2$, a professora apresenta a parábola $y = -2x^2$ para que os alunos esbocem o seu gráfico dizendo: "antes de começar a desenhar, pensem o que é que dá" *(registo de aula, 28 de Abril)*. Ouvem-se então alguns alunos dizer que "fica assim", "ao contrário", ao mesmo tempo que fazem o gesto sugerindo a inversão em relação à parábola anterior, havendo mesmo quem diga que ficava simétrica em relação ao eixo dos XX. Mais à frente no estudo, quando a professora utilizou os referidos modelos em cartolina, voltaria a fazer sobressair a simetria da parábola, dobrando um dos modelos segundo o eixo que passa pelo vértice.

Também na turma em que se procedia ao início do estudo da Geometria Analítica, o assunto da simetria constituiu uma oportunidade para a professora utilizar recursos intuitivos e esclarecer dificuldades que surgiam, por exemplo, na determinação do simétrico do ponto $(-2, 2)$. Neste caso, a professora recorreu primeiro ao exemplo da imagem num espelho e depois também à dobragem da folha segundo o eixo fornecido, como dou conta no registo seguinte:

> [A professora] desenhou um triângulo e perguntou: "se pedisse o simétrico do triângulo e não vos desse mais nada vocês conseguiam?". Em seguida, traçou um eixo e perguntou como seria a construção. Ouve-se um aluno dizer "traço a perpendicular". No quadro a professora diz: "se [o desenho] estivesse numa folha, dobrava". Esta técnica de dobragem é depois usada pela professora no referencial

para descobrir o ponto simétrico pedido: "dobra-se pelo eixo dos XX e obtém-se P_1 cujas coordenadas são $(-2, -2)$. Sim ou não?"

(registo de aula, 28 de Fevereiro)

Dificuldades dos alunos. O episódio a que se refere o registo de aula anterior, diz precisamente respeito a uma situação em que os alunos, como disse, revelaram algumas dificuldades. Nessa aula, aumentando um pouco o grau de complexidade na tarefa de marcação de pontos num referencial, a professora pediu as coordenadas do ponto simétrico de $(-2, 2)$, ao que alguns alunos responderam imediatamente $(2, -2)$. Depois desta resposta, passou-se o diálogo que a seguir transcrevo.

Professora — Qual a imagem que têm da simetria?
Um aluno — É o inverso.
Professora —Inverso?
Um aluno [não sei se o mesmo] — O oposto.
Professora — Mas eu não estou a falar em números.

(registo de aula, 28 de Fevereiro)

De facto, os alunos pareciam estar a responder pensando no simétrico de um número e não na simetria geométrica de um ponto. A professora apercebeu-se desta confusão e, para esclarecer a situação, chamou a atenção que se estava em presença de um objecto cuja imagem se pretendia obter, usando, como já foi referido, o exemplo da reflexão num espelho.

As dificuldades manifestadas pelos alunos nas aulas foi uma das questões abordadas nas entrevistas realizadas depois de cada uma das aulas. De um modo geral, Maria da Graça, não mencionou dificuldades específicas, embora, depois de uma das aulas da primeira turma observada, tenha referido que a maioria dos alunos apenas "receberam a informação" que ela apresentava, e generalizou mesmo esta situação a outras turmas — "este ano os décimos são todos assim" *(entrev. pós-aula, 3 de Março)* — reconhecendo que deste modo os alunos vão acumulando dificuldades. Mais especificamente, na primeira turma, aludiu apenas os problemas demonstrados pelos alunos na identificação dos pontos sujeitos a determinada condição quando está em jogo a conjunção ou disjunção. A professora referia-se a um episódio de que o registo seguinte pretende dar conta.

> Uma aluna sugere para correcção um outro exercício (que pedia a condição correspondente a determinada região dada graficamente, ver figura 1), sugestão que a professora segue pedindo-lhe para ir quadro. Para o resolver, a professora conduz a análise da figura com perguntas como: "[a região] está limitada por duas rectas, qual é a primeira?", "a região é a superior ou a inferior [à recta]", "está à direita ou à esquerda [da recta]?". A aluna vai respondendo, passo a passo.
>
> Identificadas cada umas das partes, a professora escreve no quadro a condição que a define, primeiro $x \geq 3$ e depois $y \geq 1$, e depois pergunta: "e é uma intersecção ou uma reunião?". Como a aluna não sabia — "É isso o que eu não sei, stôra" — a professora recorre à figura e a pontos 'concretos' procurando mostrar que "se fosse a reunião", a região obtida não correspondia à que aí estava assinalada.
>
> *(registo de aula, 3 de Março)*

Na segunda turma, Maria da Graça referiu-se às dificuldades de certos alunos em esboçar o gráfico de uma parábola dada a sua expressão analítica e em reconhecer que uma expressão do tipo $y = a(x-h)^2$ representa uma parábola. Em relação ao primeiro caso, na aula em que se iniciou o estudo da parábola, a professora, depois de uma breve introdução, escreveu no quadro a expressão $y = 2x^2$ e pediu que os alunos esboçassem o seu gráfico dizendo: "vão dar valores e tentar fazer a sua representação gráfica". O aluno que estava sentado a meu lado revelou de facto as dificuldades que Maria da Graça mencionou, como se pode depreender do registo seguinte:

> O aluno começa logo a resolver o exercício proposto. Desenha um referencial, escolhe três valores para x (2, 3 e 4) e calcula correctamente os valores de y (escrevendo, por exemplo, $y = 2.2^2$). Depois pára e ouço-o dizer, "não sei o que é para fazer".
>
> A professora que por acaso vai a passar ao lado, pergunta-lhe o que já fez e ele responde que não sabe continuar. "Então como é que fizemos com a recta?", diz enquanto se debruça sobre o caderno do aluno para o ajudar. Desenha então a tabela

x	y
2	8
3	18
4	32

pede-lhe que marque os pontos no referencial e vai-se embora.

O aluno marca correctamente os três pontos, une-os por uma curva e volta a parar. O desenho obtido era qualquer coisa do tipo:

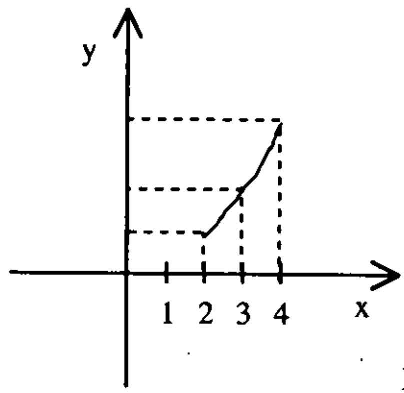


Figura 5

A professora regressa e sugere que o aluno marque os pontos correspondentes a $x = 0$ e $x = -1$, coisa que ele faz imediatamente, unindo-os também, prolongando um pouco a linha que já estava traçada, obtendo um esboço como o que apresento na figura 6.

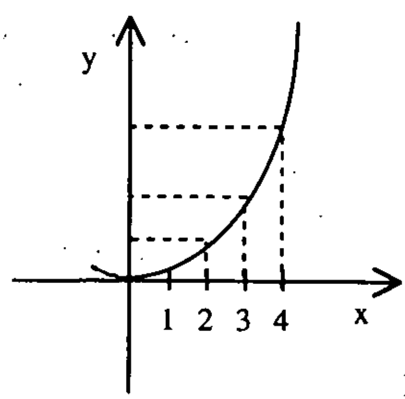


Figura 6

> A seu lado, a professora pergunta-lhe, "é preciso marcar mais pontos?", e acrescenta, "já tens a tua parábola".
>
> *(registo de aula, 28 de Abril)*

O aluno em questão foi capaz de calcular diversos valores de y para valores de x que escolheu e que a professora lhe sugeriu, mas depois não sabia o que fazer com os valores encontrados. Na entrevista que se seguiu a esta aula, Maria da Graça considerou que essa incapacidade se deve ao facto de os alunos estarem à espera que seja o professor a fazer esses cálculos: "lá está a velha história, eles estão habituados que a gente lhes forneça os dados" *(entrev. pós-aula, 28 de Abril)*. Reconheceu que os alunos, mesmo quando calculavam alguns pontos, quase sempre exclusivamente para valores positivos de x e em nenhum caso a origem, não sabiam depois continuar — "houve [só] ali umas meninas que fazem tudo certinho" *(entrev. pós-aula, 28 de Abril)*.

Em relação ao caso da parábola $y = a(x - h)^2$, a professora manifestou-se pouco satisfeita com a forma como decorreu a aula em que foi estudado. "Não gostei", disse, considerando que a aula "não resultou" e assumindo a responsabilidade por esse facto: "eu não soube encaminhar aquilo devidamente", "ali houve falha da minha parte", "não consegui traduzir aquela expressão como deve ser" *(entrev. pós-aula, 2 de Maio)*. Maria da Graça referia-se a dificuldades em fazer ver aos alunos que uma expressão do tipo $y = a(x - h)^2$ representa a parábola obtida por deslocação do vértice da parábola $y = ax^2$, da origem para um ponto (h, 0), como a figura 7 pretende ilustrar, dificuldades essas que se podem depreender do registo que a seguir apresento.

> A professora inicia o estudo do assunto do sumário: "vamos então dar a matéria". Faz referência às parábolas já estudadas, escrevendo as suas expressões $y = ax^2$ e $y = ax^2 + c$ no quadro, e usando os modelos de cartolina para passar da primeira para a segunda. Nesta altura dirige-se aos alunos dizendo: "E agora pergunto-vos eu. E se eu deslocar para a esquerda, ou direita, mas [com o vértice] sobre o eixo dos XX?". Enquanto faz esta pergunta a professora desloca um modelo em cartolina sobre o referencial desenhado no quadro.

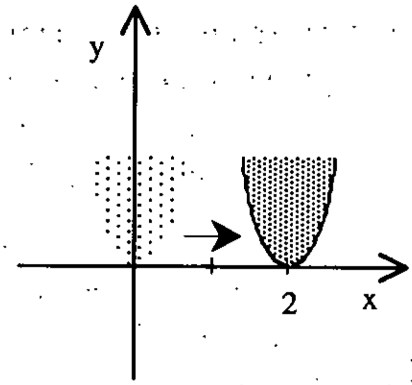


Figura 7

"Se for V (2, 0)", continua a professora, "como escreverei a equação [da parábola]?", dizendo ao mesmo tempo que a parábola que tinha na mão (modelo em cartolina) era $y = 1/2x^2$. Vários alunos na sala dizem imediatamente: $y = 3x^2 + 2$.

A professora diz então que se assim fosse, seria a situação anterior $y = ax^2 + b$ e, usando sempre o modelo em cartolina, desloca-o ao longo do eixo dos XX tentando que os alunos se apercebam do erro e digam a expressão correcta. A certa altura, escreve no quadro a expressão que pretendia que os alunos formulassem. Com a expressão pretendida escrita no quadro — $y = 1/2(x-2)^2$ — a professora pergunta aos alunos: "e porquê?".

Ninguém responde e a professora parece sentir que não está a ser acompanhada. Procura melhorar o desenho — "vou tentar desenhar melhor, se isto estivesse bem feitinho via-se melhor" — e com um exemplo em que marca com giz pontos na parábola em cartolina tenta que os alunos percebam o que acontece quando se dá a translação (na verdade o desenho ajuda pouco e presta-se a confusões).

A professora diz depois que as funções da forma: $y = a(x-h)^2$ são parábolas "que têm as características da parábola: $y = ax^2$ e cujos vértices estão situados em $(h, 0)$.

(registo de aula, 2 de Maio)

Na entrevista, Maria da Graça considerou que os alunos não perceberam o que ela estava a fazer — "ficaram um bocado a leste" — e que embora tivessem referido que tinham percebido, disseram-no "para fazer jeito" *(entrev. pós-aula, 2 de Maio)*. Em sua opinião trata-se de uma situação que não é fácil explicar aos alunos — "para todos os efeitos isto é complicado" — e mesmo que os alunos entendam que é apenas a abcissa que se modifica com a translação sobre o eixo dos XX, "têm tendência para fazer $x + 2$ e não $x - 2$" *(entrev. pós-aula, 2 de Maio)*, quando a deslocação é no sentido positivo.

Este tipo de dificuldade não se verificou na aula anterior — no estudo da parábola $y = ax^2 + b$ a partir da parábola $y = ax^2$ — quando professora utilizou os modelos em cartolina, deslocando-os sobre o eixo dos YY. Em relação a essa aula, Maria da Graça sentiu-se confortada e satisfeita — "a outra aula gostei, acho que funcionou lindamente, eles perceberam muito melhor" *(entrev. pós-aula, 2 de Maio)*. Considerou que o objectivo em ambas as aulas era que os alunos tirassem por si sós a conclusão pretendida, mas que só o conseguiu na primeira. No entanto, deu a entender que isso não seria um grande problema: "eu acho que eles depois fixam e andam para a frente" *(entrev. pós-aula, 2 de Maio)*.

O cálculo e os conceitos. Pronunciando-se sobre a última aula observada na turma que esteve a estudar Geometria Analítica, Maria da Graça considerou que os alunos estiveram a fazer Matemática — "Acho que sim, para mim isto tudo é fazer Matemática" *(entrev. pós-aula, 4 de Março)* — referindo, a propósito, o cálculo e o raciocínio como elementos da actividade matemática:

> "Não é só fazer exercícios é... Não é só praticar cálculos — o praticar cálculos para mim também é fazer Matemática. Mas é mais, eles praticaram o raciocínio. Andaram a tentar intersecções, reuniões. Para mim é [fazer Matemática]"
>
> *(entrev. pós-aula, 4 de Março)*.

Concordou, no entanto, que os alunos desta turma poderiam ir mais longe se tivessem mais tempo para trabalhar em aula os assuntos propostos, consideração que fez emergir uma grande preocupação com o cumprimento do programa: "ando sempre aflita com a correria no fim do programa" *(entrev. pós-aula, 4 de Março)*. Este constrangimento já se tinha evidenciado quando, na entrevista depois de uma aula, Maria da Graça falou sobre o facto de a maioria dos alunos não fazerem os trabalhos de casa e ela não saber como resolver o problema. Não pede que os façam em aula porque assim não progride — "tenho que cumprir o programa" *(entrev. pós-aula, 3 de Março)* — mas continua a marcar os trabalhos porque acredita que há sempre algum aluno que pode aproveitar. Reconheceu também que, sem os alunos terem realmente apreendido os assuntos, o progresso é ilusório, mas manifestou uma certa impotência perante uma situação que não vê como ultrapassar: "é sempre a mesma coisa" *(entrev. pós-aula, 3 de Março)*.

Apreciando as aulas da outra turma, ainda sobre a questão de os alunos estarem ou não a fazer Matemática, Maria da Graça, consoante as aulas, manifestou opiniões diferentes, dando a entender, globalmente, uma ideia pouco positiva a este respeito. Em relação à primeira aula, a professora hesitou um pouco — "talvez" — e considerou ser "complicado" responder: "eles estiveram mais a ver, estiveram mais a fazer um estudo intuitivo, não estiveram propriamente a fazer uma demonstração (...) mas a Matemática também passa por isso" *(entrev. pós-aula, 28 de Abril)*. Tratava-se da aula em que se iniciou o estudo da função quadrática, onde a professora propôs o esboço de parábolas, conhecidas as expressões analíticas respectivas, e, com figuras de um livro, procurou que os alunos identificassem o que havia de comum e diferente entre as várias parábolas (de equação $y = ax^2$, com a positivo e negativo). Em sua opinião, faltou no estudo a componente analítica: "depois temos que generalizar, provar realmente, de uma forma analítica, que isto tudo quanto nós vimos se passa, seja qual for a função e não só para estes casos que eles viram apenas por observação" *(entrev. pós-aula, 28 de Abril)*. A este propósito, vale a pena referir um episódio recolhido sobre o estudo das parábolas que a seguir descrevo.

> Um aluno tinha terminado no quadro o esboço da parábola $y = 3x^2 - 12$ e a professora pergunta-lhe: "como identificarias os zeros sem ser pelo gráfico?". O aluno não responde e a professora dirige então a pergunta aos alunos sentados. Vários levantam o braço e há um que solicitado pela professora responde correctamente.
>
> O aluno que estava no quadro ouviu e a pedido da professora inicia o cálculo que termina correctamente, embora indicando apenas uma das raízes. A professora corrige e termina dizendo algo como: "a via analítica confirma a via gráfica". Chama ainda a atenção para a importância do cálculo analítico, referindo que a utilização do gráfico só é possível quando está "extremamente bem desenhado" e quando se está em presença de valores exactos.
>
> *(registo de aula, 2 de Maio)*

A abordagem gráfica, no entanto, parece ser valorizada pela professora, considerando que os alunos desse modo aderem com mais facilidade ao assunto e compreendem melhor os vários conceitos associados a esse estudo. Numa das entrevistas depois das aulas, fez mesmo notar que os alunos estão a reagir muito bem à forma com esta matéria está a ser dada, em sua opinião, muito diferente da forma como era dada com programas antigos. Anteriormente, disse, a abordagem era "mais teórica" e agora é mais "prática": "eles [agora] analisam tudo através do gráfico (...) e só depois de verem tudo pelo gráfico é que se faz a (...) parte analítica, a dedução de todas as definições" *(entrev. pós-aula, 28 de Abril).* Considerou que esta parte do programa "melhorou extraordinariamente com a Reforma": "eles [agora] vêem tudo, sabem ver quando uma função é crescente, decrescente, os máximos, mínimos (...), vêem tudo através da análise de um gráfico" *(entrev. pós-aula, 28 de Abril).*

Sobre uma outra aula, respondendo ainda à questão de os alunos terem estado ou não a fazer Matemática, Maria da Graça começou por dirigi-la a si própria, negando que isso tivesse acontecido: "Ai, eu hoje acho... eu hoje não estive a fazer [Matemática]; eu hoje acho que não resultou" *(entrev. pós-aula, 2 de Maio).* Considerou que os alunos ainda "tentaram descobrir", que "fizeram um esforço" e que há sempre alunos que "até tentam participar e que estão com atenção na aula" *(entrev. pós-aula, 2 de Maio).* Tratava-se da aula já referida em que a professora sentiu dificuldade em fazer os alunos perceber que uma parábola $y = a(x-h)^2$ se pode obter a partir da parábola $y = ax^2$ por uma translação segundo o eixo dos XX.

Relativamente à mesma aula, considerou que um aluno a corrigir um exercício do trabalho de casa no quadro com a sua ajuda, estaria a fazer Matemática, desde que tivesse consciência do que fazia, uma vez que estavam em jogo elementos matemáticos como conceitos e sua aplicação, a resolução de equações, comparação de representações matemáticas:

> "Se ele estava consciente do que estava a fazer, ele aqui estava a fazer Matemática. Estava a fazer uma mudança, estava a fazer uma aplicação de um conceito. Depois esteve a aplicar a via analítica na resolução de uma equação. Ver que geometricamente tinha um aspecto e que analiticamente conseguia lá chegar. Eu acho que aí, nessa fase, fez-se Matemática."
>
> *(entrev. pós-aula, 2 de Maio)*

Em relação à última aula da série de observações nesta turma, Maria da Graça foi mais positiva, considerando que os alunos estiveram a fazer Matemática: "acho que sim que estiveram; pelo menos conseguiram deduzir conceitos a partir de outros, conseguiram deduzir uma formulazinha a partir de coisas que já sabiam" *(entrev. pós-aula, 4 de Maio)*. Solicitada a explicar melhor esta frase, esclareceu que pretendia dizer que alguns alunos conseguiram determinar as coordenadas do vértice de uma parábola dada por uma equação completa (referia-se a $g(x): x^2 - 5x + 6$). Manifestou ainda a ideia que os alunos compreenderam bem os conceitos e processos que tinham sido trabalhados. Especificou dizendo que os alunos "ficaram com uma ideia óptima sobre a parábola, que [ela] é simétrica em relação à recta que passa pelo vértice e que ao calcularem um dos braços já não precisam de fazer contas... [para calcular o outro]" *(entrev. pós-aula, 4 de Maio)*.

Maria José

As duas entrevistas previstas com esta professora, realizaram-se na escola onde ela dava aulas. O primeiro encontro foi marcado para as dez horas na sala dos docentes. Quando cheguei, passavam uns minutos da hora, já Maria José me aguardava. Estavam vários professores a conversar na sala, alguns deles enquanto bebiam e comiam alguma coisa. Perguntou-me se eu desejava um café, que me veio a oferecer, e tomou também um comigo. Sentámo-nos a uma mesa redonda, ao pé de outros professores, onde se juntou uma outra professora que tinha acabado de entrar e que eu conhecia. Reparei que havia aquecimento por baixo da mesa.

Conversámos os três essencialmente sobre a minha reacção ao primeiro contacto com a escola. Acabado de chegar, disse que a impressão inicial era boa, talvez pela cor branca e rosa com que a escola estava pintada, pela limpeza que aparentava e pela sua luminosidade, mesmo no interior. O dia também ajudava, estava muito sol. A sala dos docentes era agradável, os professores pareciam bem dispostos e via-se que as duas professoras falavam com gosto da escola. Maria José estava muito solícita, talvez não totalmente à-vontade e um pouco nervosa, mas sorria bastante e parecia satisfeita. Tratava-me na terceira pessoa e mesmo depois de eu ter sugerido que nos passássemos a tratar por tu, já durante a entrevista, regressava ao tratamento inicial com alguma frequência.

Depois de alguns minutos de conversa, dirigimo-nos os dois ao local que a professora tinha escolhido para a entrevista. Era uma sala onde dava as aulas de tecnologias de informação. Uma sala ampla, com mesas junto às paredes e vários computadores. Sentámo-nos quase frente a frente, junto à única mesa sem nada em cima e que estava encostada a uma janela. Durante toda a entrevista, só o soar da campainha para a entrada e saída das aulas nos interrompia. Embora forte, era um toque curto, pelo que nunca causou grande perturbação. Não dei por barulho de alunos.

Foi uma entrevista com cerca de duas horas que decorreu de forma fluente, apesar de me parecer que Maria José nunca se sentiu completamente descontraída. Por vezes, sobretudo nos momentos em que a confrontava com os episódios escritos[1] a que lhe pedia um comentário ou reacção, hesitava um pouco, dizendo mesmo que não sabia se tinha compreendido a pergunta, ou aquilo que eu lhe apresentava. Sobre alguns aspectos da sua prática lectiva pronunciava-se com algum cuidado, parecendo não querer dar ideia que fazia coisas que na realidade não realizava.

Pela sua postura durante a entrevista, fica a impressão que Maria José estava a levar a sério o seu papel de entrevistada, que encarava a situação como importante e que ela própria reconhecia interesse na contribuição que lhe era solicitada. O tom geral foi de colaboração, sentindo-se sempre disponibilidade da parte da professora em responder às questões colocadas. Falou bastante, muito em particular sobre a sua vida escolar e profissional. Sobre as aulas alongou-se um pouco menos mas, de facto, talvez não seja fácil falar em abstracto sobre este assunto. Mesmo assim, desenvolveu alguns aspectos relacionados com as aulas, dando elementos específicos (com exemplos). Sobre a Matemática e a

[1] Anexo 4.

actividade matemática, sentiu mais dificuldade em falar mas expôs algumas das suas ideias e opiniões, sobretudo quando confrontada com os episódios.

A segunda entrevista realizou-se à mesma hora e na mesma sala, passadas cerca de duas semanas. Encontrámo-nos pontualmente às dez horas na sala dos docentes onde Maria José me aguardava e de onde partimos para dar início imediato à entrevista. Desta vez a conversa durou pouco mais de uma hora (cerca de uma hora e quinze minutos). Todas as questões previstas foram abordadas quer as que não foram tratadas na primeira entrevista, quer as questões sobre as aulas observadas e os episódios.

Maria José manifestou o mesmo espírito de colaboração embora, em vários momentos, a sentisse um pouco mais retraída, menos convincente (e talvez menos convicta) nas respostas que dava, sobretudo nos momentos em que falou sobre a Matemática e a actividade matemática e também um pouco nos seus comentários e reacções aos episódios.

Foi perceptível, e a professora disse-o várias vezes, que Maria José achou as perguntas difíceis, sobretudo porque incidiam em assuntos sobre os quais, como declarou, nunca tinha reflectido. No fim da primeira entrevista, talvez por isso, declarou que a conversa tinha sido útil.

A escolha e percurso profissionais

Maria José é professora numa escola secundária de Lisboa. Depois dos três primeiros anos da licenciatura em Matemática na Faculdade de Ciências, seguiu o Ramo Educacional nessa faculdade, mas começou a leccionar mesmo antes de ter terminado o curso, possuindo actualmente uma experiência de cerca de catorze anos no ensino.

Nos seus tempos de aluna no ensino liceal, Maria José, como contou, nunca pensou vir a ensinar Matemática, apesar dos vaticínios nesse sentido da sua professora dessa disciplina dos 6º e 7º anos, aos quais respondia sempre "nem pense, nem pense" *(entrev. 1, p. 2)*. Explicou que falava assim porque considerava essa profissão com "muito trabalho", que exigia "muita paciência", e que a "posição de um professor era muito ingrata" *(entrev. 1, p. 2)*. No entanto, referiu que já nessa altura gostava de Matemática — "sempre gostei muito de

Matemática" *(entrev. 1, p. 1)* — mencionando, em particular, o seu gosto antigo pela Aritmética, associando-o ao tempo em que frequentava o colégio onde fez os primeiros anos de escolaridade. Porém, o gosto que sentia por esta disciplina não a levava a distingui-la de outras com as quais, como disse, tinha igualmente uma relação positiva — "sempre gostei, aliás, de várias disciplinas, sempre gostei muito de Física, sempre gostei muito de... da parte de Biologia" *(entrev. 1, p. 1)*. E, como fez questão de dizer, nessa altura, nem sequer pensava tirar um curso de Matemática: "não era isso que eu queria seguir" *(entrev. 1, p. 1)*.

Na verdade, como a professora confessou, a ideia era seguir medicina, cirurgia — "tive um grande fascínio por operações" *(entrev. 1, p. 1)* — ou física nuclear. Acabou por abandonar estas inclinações, no primeiro caso, por sentir que a profissão de médica não lhe permitiria dar à família a assistência que queria, e, no segundo caso, porque, não existindo o curso em Portugal, teria que sair do país e não dispunha de disponibilidade financeira para o poder fazer.

Assim, embora pudesse ter optado entre um leque variado de cursos, incluindo os de Engenharia, como exemplificou, Maria José acabou por escolher a licenciatura de Matemática porque "até gostava" *(entrev. 1, p. 4)* dessa via de estudos. Esta escolha foi acompanhada da escolha da profissão pois, como contou, quando se decidiu inscrever no curso fê-lo a pensar vir a ser professora. As razões que evocou explicar a escolha profissional, para além dos aspectos familiares referidos, prendem-se com o gosto pelo ensino e pelo relacionamento com os alunos, de que se apercebeu com as lições particulares de Matemática que dava, como se pode depreender do seguinte diálogo, logo no início da primeira entrevista:

Inv. — Quando é que tomaste a decisão 'vou para professora'?
MJ. — A... logo que me inscrevi no curso de Matemática.
Inv. — Portanto, a inscrição no curso de Matemática...
MJ. — Foi já com o objectivo de que... ia leccionar Matemática. Até porque eu já dava algumas explicações, e gostava de explicar, gostava de ensinar.
Inv. — E o que é que contou mais nessa decisão?
MJ. — Bem. P'ra já, aquele aspecto... portanto... familiar, em relação [ao apoio] que um professor pode dar [à família] e... [Há o] acompanhar os alunos que eu acho que é muito importante, conhecê-los. Gosto não só de ensinar Matemática mas gosto de

acompanhar a sua evolução, a sua maneira de ser, compreendê-los... não sei, e gosto muito de...

Inv. — (...) Segundo o que eu percebi, nem te passava muito pela cabeça ir para professora. Pelo menos até certa altura, não é?

M.J. — Sim.

Inv. — Depois de... Pelos vistos, quando foi mesmo o momento da inscrição, acabaste por decidir...

M.J. — Por optar por aquilo que... gostava muito... e [de que] me apercebi também, vamos lá ver, à medida que eu ia dando as explicaçõeszinhas caseiras... Achava piada explicar uma coisa que eles antes consideravam difícil e eu mostrava, tentava mostrar, como era simples. Pronto, isso é um pouco um desafio (...). E [d]isso, cá para mim, ficam uns residuozinhos, não é? Quer dizer, a opção não se faz assim de um momento para o outro.

(entrev. 1, p. 3)

Maria José terminou o seu curso no princípio dos anos oitenta, altura em que realizou o estágio, do qual guarda uma imagem globalmente positiva. "Foi produtivo", disse, referindo-se genericamente a contribuições do estágio ao nível das "novas questões" que lhe colocou e ao nível da discussão das aulas assistidas — "fez-me (...) pensar naquilo que se diz" — e da sua planificação — "a gente não sab[ia] preparar uma aula" *(entrev. 1, pp. 14-15)*. A este respeito destacou o facto de ter passado a explicitar melhor o que queria fazer com os alunos, dando relevo ao que considerava mais importante, e a verificar se os alunos realmente aprendiam o que era pretendido. Referiu, a propósito, o papel da orientadora como pessoa "muito organizada" e o trabalho com as colegas de estágio: "nós discutíamos tudo em conjunto"*(entrev. 1, pp. 14-15)*.

Relativamente à sua formação educacional na Faculdade, a professora reconheceu que lhe terá aberto algumas perspectivas — "abriu-me os olhos p'ra montes de... de aspectos, de teorias e de tudo o mais" *(entrev. 1, p. 12)*. No entanto, embora para algumas disciplinas tivesse considerado que as "aulas eram pertinentes e faziam pensar" *(entrev. 1, p. 12)*, evidenciou sobretudo um sentimento de que a formação terá sido demasiado teórica ou geral, e algo desligada do que encontrou no estágio e depois já como professora profissionalizada. Em particular, referiu-se à necessidade, na sua formação educacional, de uma maior ênfase nas questões do ensino da Matemática e no trabalho com os aspectos didácticos específicos da disciplina, como se depreende do que disse a este respeito:

> "De facto, que eu me recorde, por exemplo, o estruturar determinado assunto em Matemática, não me lembro disso ter sido feito e [é o] que eu agora sinto necessidade, porque... É aquilo que nós a... discutimos com os nossos colegas. Como dar isto, como dar aquilo, exemplos (...). Discutir o porquê, ou porque sim, ou porque não..."
>
> *(entrev. 1, p. 14)*

Maria José reconheceu terem existido mudanças significativas em si enquanto professora, ao longo dos seus anos de ensino. "Muda[-se] sempre", disse, referindo-se essencialmente a dois aspectos: à "maneira de estar" na aula e ao "modo de ensinar" *(entrev. 1, p. 7)*. No que se refere ao seu modo de estar em aula e à relação com os alunos, diz sentir-se mais segura, mais compreensiva e tolerante perante algumas atitudes dos alunos, procurando "dar a volta" às situações, mais do que tomar decisões drásticas: "aquelas 'bocas' que eles nos mandavam [e] que, com a nossa insegurança no início, era quase pôr [logo] na rua, não é? Agora não, a pessoa habitua-se a dar a volta à situação" *(entrev. 1, p. 7)*. Sobre o seu modo de ensinar, referiu que a sequência de ensino inicialmente por si usada — exposição-prática — tinha sofrido alguma inversão:

> "Por exemplo, no modo de ensinar, a gente ao princípio tem a tendência de monopolizar a situação quando expõe um assunto qualquer. (...) A tendência natural no início era 'expõe-se, depois pratica-se', não é? Agora, julgo que o contrário é mais... correcto: 'levar os alunos a', tanto quanto possível, não é?
> Depois é que a gente formaliza a situação, em conjunto. Portanto, a conclusão é tirada em conjunto, não [é] o professor a despejar e depois eles a trabalharem. Isto, [é] uma diferença fundamental."
>
> *(entrev. 1, pp. 8-9)*

Fica assim a ideia de que, actualmente, Maria José vê de outro modo o papel dos alunos, reconhecendo a importância do seu envolvimento nos vários momentos da aprendizagem, da sua participação e intervenção nas aulas. Deixou transparecer também esta ideia, ainda a propósito dos aspectos que terão mudado na sua prática como professora: "às vezes, o quererem falar ao mesmo tempo é sinal que o aluno quer participar (...), e [agora] não estou preocupada com o barulho em si; essa é... é outra mudança" *(entrev. 1, p. 10).*

Ainda relativamente ao modo de ensinar, fez também sentir que hoje está mais sensível à importância de fazer chegar aos alunos a noção de que a Matemática "serve para alguma coisa" *(entrev. 1, p. 8)* e que agora valoriza mais a compreensão dos alunos do que vai sendo ensinado. A este respeito, reconheceu que, nos primeiros anos de ensino, a preocupação em cumprir o programa era muito forte e que a progressão na matéria decorria muitas vezes sem a sua efectiva compreensão por parte dos alunos:

> "A gente dantes estava preocupada era... em... em ensinar em x tempo determinados conteúdos. No início, muitas das vezes, reconheço isso, a gente não se preocupava muito se, de facto, eles tinham entendido os conceitos. E, agora não me importo que seja x+y tempo, não é? Mas que aqueles conceitos fiquem... mais fundamentados. Quer dizer, que entendam o que está por trás. (...) Interessa-me mais que eles não mecanizem, mas que entendam... Mas que... pronto, que aquilo, de facto, lhes sirva p'ra alguma coisa. E que depois saibam aplicar."
>
> *(entrev. 1, p. 8)*

As entrevistas, as aulas observadas e as discussões daí decorrentes, deixam a impressão de que há, da parte de Maria José, um gosto pela profissão, pela Escola, por ensinar. "Gosto de ser professora de Matemática, não seria professora de outra coisa qualquer" *(entrev. 1, p. 16)*, disse, quando indicou as motivações e contrapartidas que via na sua profissão. Temperou um pouco esta sua afirmação, logo a seguir, quando acrescentou que era também professora de uma disciplina ligada à informática, área de que também gostava muito.

Ao continuar a especificar os aspectos mais gratificantes da sua profissão, percebeu-se que, para Maria José, o trabalho e o relacionamento com os alunos, mesmo, como deu a entender, fora das aulas, são a fonte das suas principais motivações e contrapartidas profissionais. Como exemplo de um momento particularmente significativo da sua vida como professora, Maria José evocou o dia em que os alunos do ano do estágio se lembraram do seu aniversário e se quotizaram para lhe comprarem uma prenda. "São aqueles [momentos] que nos marcam" *(entrev. 1, p. 17)*, disse, referindo-se a um dos alunos que, não tendo dinheiro para participar, lhe oferecera um ramo de flores silvestres. Além deste tipo de contrapartidas, sentir que pode contribuir para a aprendizagem e para o gosto dos alunos pela Matemática, são outras das suas motivações profissionais:

> "Eu gosto de ensinar qualquer coisa que os miúdos depois percebam. [E] ver no dia seguinte se, de facto, aquilo que eu ensinei no dia anterior [es]tá percebido. (...) Logo no início [do ano] pergunto quantas pessoas gostam de Matemática (...) e tenho por hábito, no final do ano, perguntar quantas pessoas gostam de Matemática. E fico toda contente, quanto mais não seja, [se] há mais quatro [alunos] que levantam o braço. Isto p'ra mim é uma motivação."
>
> *(entrev. 1, p. 16)*

Maria José não diz que se sente profissionalmente realizada — "acho que uma pessoa nunca se sente totalmente realizada" *(entrev. 1, p. 18)* — e apresenta o insucesso dos alunos como o principal obstáculo a essa realização:

> "Quando digo que não me sinto realizada, não quer dizer que não goste... tem a ver com os resultados deles... Quer dizer, para mim seria óptimo que... o eco do meu ensino fosse... Pronto... fosse mais produtivo, [que] tivesse muito mais positivas que as que tenho... Aí é que a gente acha que ainda não está realizada de todo e começa por vezes... aquela insatisfação..."
>
> *(entrev. 1, p. 18)*

Mencionou também o "cansaço" *(entrev. 1, p. 18)* que sente na sua actividade profissional que, no entanto, não a impede de incluir entre os seus projectos, trabalhar com grupos de professores e fazer um mestrado em Matemática, ligado ou não ao ensino, com o objectivo manter o contacto com a disciplina. Nos últimos anos, o seu pólo de interesse principal, para lá do ensino da Matemática, tem sido a Informática, área em que recentemente tirou um curso superior e onde se insere um projecto em que participa. Maria José, como por diversas vezes disse, considera-se uma pessoa com vários interesses, que gosta de fazer muitas coisas e a quem os desafios não atemorizam: "eu reajo aos desafios, gosto muito de reagir aos desafios" *(entrev. 1, p. 9)*.

A Matemática

Enquanto aluna, Maria José viveu sempre confortavelmente com a Matemática. Como vimos, no ensino pré-universitário, a Matemática sempre se inseriu no conjunto das suas disciplinas preferidas e o seu gosto por ela nasceu cedo, com a Aritmética. Começou por justificar esse gosto, dizendo que a atraía o facto de, em geral, a Matemática ser considerada uma disciplina difícil e isso constituir para ela uma motivação. "Eu reajo um bocado aos desafios", explicou, "e aquilo que fosse difícil p'rás pessoas, p'ra mim era um motivo p'ra começar... (riu-se) não [quero] dizer a gostar (...); quer dizer, se é difícil, então é uma questão para eu tentar e ver se consigo" *(entrev. 1, pp. 21-22)*. Falou também da sua "facilidade" em Matemática, associando-a às "óptimas notas" que tinha, e do sentimento de "confiança" *(entrev. 1, p. 22)* que os bons resultados lhe davam em relação à aprendizagem da disciplina.

Ainda procurando explicar as razões do seu gosto pela Matemática, mencionou uma qualidade desta disciplina enquanto ciência que enunciou dizendo "a Matemática quando é, é" *(entrev. 1, p. 21)*, no sentido de que é possível nela, em cada momento, saber-se o que é verdadeiro ou não, advindo daí a beleza que a atraía. Continuando a explicação, disse:

> "[A Matemática] não é nenhuma ciência experimental. Aquilo demonstra-se tudo e acho que aí é que está o bonito [dela]. Quando eu faço as demonstrações que é aquilo [de] que [os alunos] menos gostam, p'ra mim é aquilo que mais me dá prazer (...)
> Enquanto que o [cientista] físico... à custa das experiências, lá vai dizendo umas coisas, nós ali [na Matemática] temos tudo, o caminho está perfeitamente definido, não há que enganar."
>
> *(entrev. 1, p. 21)*

Maria José considerou que a sua relação com a Matemática enquanto aluna foi sempre globalmente positiva e que esse bom relacionamento se manteve sem variações significativas até ao ensino superior. Na passagem para este nível de ensino, notou algumas diferenças na Matemática trabalhada — "no secundário era mais... o cálculo, tudo mais mecanizado; ali [na Faculdade] era uma aprendizagem dos conceitos" *(entrev. 1, p. 26)*. A facilidade que sentia na disciplina "teve muitos altos e baixos" *(entrev. 1, p. 26)*, o que no entanto, como disse, não fez esmorecer a sua relação com a Matemática.

Na primeira parte da nossa conversa, Maria José não destacou nenhum assunto matemático que a tivesse atraído mais na sua formação escolar ou, pelo contrário, de que tivesse gostado menos. Nessa altura, apenas referiu que não gostava muito de cálculo — "contas muito grandes não é assim lá muito comigo" *(entrev. 1, p. 24)*. Tinha entretanto já mencionado o seu gosto pela Aritmética, nos primeiros anos de escolaridade, e pela Análise, que preferia à Álgebra, no ensino superior. Para além disso, nomeou, como vimos, a demonstração como sendo a actividade matemática que lhe dá mais prazer.

Veio depois a manifestar outras preferências temáticas, como a Trigonometria, preferência essa que reafirmou, já na segunda entrevista, acrescentando-a às Funções e à Geometria na lista dos tópicos que mais gosta de ensinar. O seu agrado em trabalhar estes tópicos com os alunos foi justificado, no caso das Funções e da Trigonometria, por eles não exigirem grande necessidade de memorização, e, no caso da Geometria, por ser um tópico com características 'concretas' e apelativo: "é mais palpável, uma pessoa consegue ali brincar com as figuras e, sei lá, há problemas tão engraçados à custa da... da Geometria que os miúdos gostam de fazer" *(entrev. 2, p. 18)*. Em relação à Trigonometria, referiu-se ainda ao facto de ela ter muitas aplicações e ser um tópico fácil de relacionar com aspectos da realidade.

Para Maria José, disse-o ela, a Matemática não é uma ciência experimental e, contrariamente ao que acontece nas ciências experimentais, é uma ciência em que se consegue demonstrar a veracidade ou falsidade das suas proposições. Esta ideia foi, aliás, retomada por mais de uma vez, ao longo das entrevistas, bem como a ideia da demonstração como actividade matemática por excelência. Quando, por exemplo, procurava distinguir a Matemática das outras ciências, afirmou que a Matemática "continua a ser a ciência (...) pura [em] que nós conseguimos demonstrar tudo o que queremos" e que reside aí "a diferença fundamental" *(entrev. 1, p. 35)*.

A Matemática será assim, para esta professora, uma ciência onde não há lugar para ambiguidades e onde se consegue sempre saber quem tem razão, o que está certo e o que está errado, e porquê. São estes atributos que a levam a referir-se à Matemática como uma ciência "intocável"*(entrev. 1, p. 35)* ou, como também disse, "indestrutível"*(entrev. 1, p. 39)*, em que se pode confiar, o que, em sua opinião, é o motivo pelo qual as outras ciências a utilizam.

Confrontada com uma frase onde as ciências naturais eram apresentadas como uma fonte de inspiração para a Matemática[1], reconheceu a necessidade desse recurso na criação matemática — "não estou a ver um matemático a inventar as coisas por si só; sozinho sem fazer ligação com a... as outras ciências" *(entrev. 1, p. 39)*. Reconhecendo a grande aplicabilidade da Matemática, acrescentou mesmo que muitas das descobertas matemáticas poderão ter tido origem em necessidades das outras ciências, e que não faria sentido a Matemática delas estar "desgarrada"*(entrev. 1, p. 39)*. Na sequência destes seus comentários, solicitada a pronunciar-se sobre o facto de ter considerado a Matemática uma ciência pura, respondeu do seguinte modo:

> "É assim: os outros socorrem-se da Matemática porque sabem que tudo quanto de lá sai é indestrutível (riu-se), não é? E portanto... quando eu digo que [a Matemática] é pura... [é que] vindo da Matemática aquilo está certo."
>
> *(entrev. 1, p. 39)*

Assim, do ponto de vista da professora, considerar a Matemática como uma "ciência pura", não implica vê-la desligada ou isolada de tudo o resto. No seu entender, a Matemática desenvolve-se teoricamente, elaborando conceitos e teorias que são aplicadas noutras áreas. "Os matemáticos", disse, "estudam a sua essência... fazem o trabalho de... todas aquelas funções, estudam-nas ao pormenor, e os outros então... vão tentar estabelecer a [sua] aplicação" *(entrev. 1, p. 35)*. E concluiu dizendo: "nós somos a base fundamental p'rás outras [ciências]" *(entrev. 1, p. 40)*.

[1] "É inegável que alguma da melhor inspiração em Matemática — nessas partes de Matemática tão pura quanto possamos imaginar — proveio das ciências naturais." (Anexo 4, episódio 3).

A actividade matemática

Falando sobre o seu envolvimento actual com a Matemática, Maria José descreveu-o essencialmente em termos do trabalho de realização e de preparação de aulas. Referiu o eventual aprofundamento de algum assunto matemático, bem como a discussão e reflexão conjunta com outros professores, analisando a forma como o tratamento de determinado tópico decorreu nas aulas e, em particular, as razões das dificuldades detectadas nos alunos:

> "O próprio contacto com os meus colegas a discutir assuntos... para leccionar determinado conteúdo. Quando nós levantamos questões [como] 'isto comigo falhou', 'os alunos não perceberam bem', [questões] sobre 'o porquê', [sobre] por que é que eles não perceberam, estou envolvida em actividades matemáticas. Estou a tentar compreender 'o porquê'. (..) No fim [de contas], eu considero tudo isto uma actividade... matemática.
> Quando eu tento fundamentar-me em determinados aspectos, sobre determinado assunto, quando tento procurar... outras coisas que estejam ligadas, estou envolvida em actividades matemáticas."
>
> *(entrev. 1, p. 30)*

Para além da actividade lectiva, mencionou o seu trabalho em Informática, e, especificamente, a actividade de programação — "quando eu faço programação nos tempos livres, é também uma actividade matemática, uma série de... de raciocínios lógicos (riu-se)" *(entrev. 1, p. 30)*. Neste trabalho, a utilização da Álgebra de Boole e a construção de circuitos lógicos vista como aplicação da Matemática, foram também apresentadas como exemplos do seu envolvimento em actividades matemáticas.

Confrontada com a questão de um professor de Matemática poder ser visto como um matemático, Maria José deu a entender alguma concordância desde que, como disse, o professor continuasse a "estudar mais alguma coisa", explicando depois com mais algum detalhe o que queria dizer:

> "Quer dizer, se não estagnar aqui [na escola] e tentar... acompanhar. (...) Portanto, [se] não ficar só nas matérias que está a leccionar, nunca perdendo o contacto com... a Matemática, aquela que nós aprendemos na Faculdade, eu acho que sim, que pode ser... um matemático."
>
> *(entrev. 1, p. 27)*

Percebe-se, pois, que Maria José reconhece existir o perigo de, uma vez na escola, o professor se ir afastando do estudo da Matemática, e o seu envolvimento com esta ciência acabar por se circunscrever aos limites estritos dos tópicos que ensina. Se isto acontecer, em sua opinião, a actividade do professor do ponto de vista matemático rotiniza-se e tende para a estagnação: "passa a vida a mecanizar actos, situações e... e não progride muito" *(entrev. 1, p. 28)*. Para esta professora, como mencionou em mais do que uma altura, é importante uma actualização científica, "para não se perder o contacto" *(entrev. 1, p. 19)* com a Matemática, para, como também disse, "aprender mais" *(entrev. 1, p. 28)*, "recordar assuntos" *(entrev. 1, p. 32)* esquecidos. Com este sentido, a actualização científica constituía aliás, um dos objectivos principais de uma eventual inscrição sua num mestrado ou em cadeiras matemáticas no ensino superior: "a nossa Matemática fica um pouco... estagnada, se a gente não tentar procurar qualquer coisa, portanto, estudar mais qualquer coisa, continuar a ver as matérias que tinha dantes na Faculdade" *(entrev. 1, p. 19)*.

Considerando que os professores de Matemática estão entre os que têm maior preocupação com a actualização dos seus conhecimentos da disciplina, Maria José deixou no entanto transparecer a ideia de que, em geral, não têm muito esse cuidado. Explicou tal acontece pelo facto de muitos dos professores não estarem a fazer o que realmente gostariam e pela desmotivação que existe nas escolas. No que lhe diz respeito, gostaria de aprender mais Matemática e, embora reconhecendo que poderia actualizar-se cientificamente por si própria, sente que é difícil e que, o alcance de uma auto-formação pode ser algo limitado: "eu acho que uma coisa é nós fazermos por nós, o que normalmente não é... espaçado regularmente, (...) e outra coisa é ir estudar um pouco mais além, com... [em] qualquer [cadeira científica de Matemática]" *(entrev. 1, p. 19)*.

Compreensão *versus* mecanização. Procurando esclarecer um pouco mais o seu ponto de vista sobre a questão de os professores de Matemática poderem serem vistos como matemáticos, Maria José, afirmou que "ser matemático não é só estudar Matemática de alto nível" *(entrev. 1, p. 29)* e que, nesta perspectiva, um professor de Matemática pode ser considerado um matemático, desde que, como sublinhou, "trabalhe com os conceitos" *(entrev. 1, p. 29)*. Ressalvou, no entanto, de novo, os aspectos da mecanização — "se [o professor] cai na mecanização, claro que não o posso considerar como um matemático" *(entrev. 1, p. 29)* — e chamou a atenção para aspectos de comunicação. Socorrendo-se de um exemplo, explicou assim a sua ideia:

> "Por exemplo, ensinar a raiz quadrada só como símbolo sem lhes explicar o conceito, não é Matemática. Não considero esse professor um matemático. Agora, se tentar exprimir algum conceito [de modo] bem estruturado... para que o aluno compreenda a essência do que é aquele símbolo, o [seu] uso (...), [o professor] é um matemático."
>
> *(entrev. 1, p. 29)*

Esta ideia voltou a evidenciar-se quando, mais à frente na entrevista, apresentei à professora uma afirmação[1] considerando a linguagem da Matemática inevitavelmente árida. Reconhecendo um carácter específico a esta linguagem — "é um código que nós temos" *(entrev. 1, p. 45)* — sublinhou a importância de lhe associar um conteúdo, de forma a permitir que os alunos percebam a razão de ser desse código e o significado dos símbolos matemáticos:

> "O que precisamos, às vezes, é de demonstrar aos miúdos que existe a necessidade de ter esse código. (...) 2x + 1 igual a não sei quê... não lhe[s] diz nada. E realmente, dito desta forma, 2x + 1 igual a qualquer coisa, sem existir [um] problema por trás, (...) a linguagem será árida, não é? A... se houve[r] uma necessidade de construção, cá está, a necessidade do problema, e depois, p'ra se estruturar a resolução daquele problema, [a aluna] sentir-se obrigada a utilizar o símbolo, se calhar, já não será tão árido."
>
> *(entrev. 1, p. 45)*

Esta preocupação com a compreensão aparece também no modo como Maria José justificou as suas preferências relativas a tópicos dos programas — Trigonometria, Funções — não reconhecendo, para o seu estudo, necessidade de grande memorização: "a Trigonometria, julgo eu, e costumo dizer até aos meus alunos, consegue-se dar sem ter que decorar quase nada"; "consegue-se estudar uma função, sem ter que memorizar aquilo tudo" *(entrev. 2, p. 18)*.

---

[1] "A linguagem da Matemática, quer queiramos quer não, é uma linguagem árida; é uma linguagem que afasta, desde sempre." (Anexo 4, episódio 15)

Também o aluno, na aula de Matemática, pode, na opinião desta professora, ser visto como um matemático. Resolver problemas, raciocinar, calcular, foram exemplos de actividades matemáticas que os alunos podem desenvolver nas aulas. No entanto, salientou a necessidade de o aluno realizar "com empenho" *(entrev. 1, p. 55)* as actividades que o professor propõe, sublinhando, também aqui, a importância de um trabalho não mecanizado:

> "Se um aluno estiver, pura e simplesmente, a copiar do quadro... está a fazer uma cópia, não é? Se o aluno estiver a participar, e a seguir o meu raciocínio, está a realizar uma actividade matemática. Acho que é um matemático."
>
> *(entrev. 1, p. 55)*

Este "seguir" (ou "acompanhar", expressão que também usou) o raciocínio do professor, como esclareceu, significa compreender.

Falando sobre as suas aulas, Maria José disse que o que lhe dá mais gosto é sentir o envolvimento e participação dos alunos. "É ter eco", da sua parte, conseguir que "a conclusão saia deles" *(entrev. 1, pp. 46-47)*. Nesta situação em que o aluno, embora orientado pelo professor, "está a elaborar o seu modelo de raciocínio para poder sair com a conclusão" *(entrev. 1, p. 55)*, ele está, segundo a professora, a realizar uma actividade matemática. Como também disse, quando o aluno compreende o que está a fazer e até se adianta ao professor, pode mesmo dizer-se que ele está desenvolver ou criar Matemática:

> "Eu estou a encaminhá-lo, não é, estou um pouco a tomar a directiva, mas se ele está... está a perceber (...). Quer dizer, se ele entende o que é que eu quero dizer e até se antecipa ou... ou acompanha ao mesmo tempo, o mesmo raciocínio, não sou só eu que estou a dirigir a situação, ele [es]tá a acompanhar comigo, ele [es]tá ao mesmo tempo que eu. É o que eu quero dizer com isto. (...) E se ele estiver a fazer isso está, de facto, a... a criar Matemática."
>
> *(entrev. 1, p. 57)*

A demonstração, a aplicação da Matemática, o cálculo. Procurando caracterizar o que é fazer Matemática, Maria José, mantendo-se no quadro da actividade lectiva, acrescentou ao ensino de conceitos, a actividade de demonstração e a de aplicação, quer fora da Matemática, quer no seu interior, significando, neste último caso o estabelecimento de conexões entre as diversas áreas e tópicos matemáticos.

Numa situação em que lhe tinha apresentado três frases[1], cada uma referindo um aspecto diferente da actividade matemática — demonstrar, resolver problemas, calcular — manifestou uma imediata adesão ao conteúdo da primeira e considerou a segunda com "uma verdade fundamental" *(entrev. 1, p. 37)* que reconheceu ainda não ter referido. "Resolver uma situação [problemática]", disse, "é, de facto, fazer Matemática", valorizando este aspecto mais que o precedente — "para mim, é mais forte que o anterior" *(entrev. 1, p. 38)*. Diga-se, a propósito, que a questão dos problemas em Matemática veio a ter uma presença pouco significativa nas entrevistas, com apenas menções curtas e esporádicas.

Em relação ao terceiro aspecto, a professora referiu que se pode fazer Matemática sem fazer cálculos, dando o exemplo da Geometria. Manifestou alguma distanciação face à ideia da Matemática como cálculo, também evidente quando, discorrendo sobre a última das três frases com que tinha sido confrontada, declarou: "o cálculo é... como é que eu hei-de dizer... um instrumento da Matemática que nós utilizamos para fazer Matemática, sim, mas que seja o cálculo... a base da Matemática, se calhar não é" *(entrev. 1, p. 38)*. Este distanciamento já se tinha esboçado no momento em que Maria José, recordo, falando da sua relação com a Matemática, declarou não gostar muito de cálculo, de fazer grandes contas. Quando enunciou tipos de situações em que considerava que o aluno estava a fazer Matemática, disse a propósito do cálculo:

> "Vamos lá a ver, até quando [o aluno] está a fazer o seu cálculo, apesar de eu fugir um bocadinho ao cálculo, quando ele está a resolver equações, está a fazer Matemática (...) A resolução de problemas, a elaboração de raciocínios, a... e a aplicação das técnicas de... mesmo as técnicas de cálculo, tudo isso... faz parte da Matemática."
>
> *(entrev. 1, p. 56)*

---

[1] "Se não provamos coisas não estaremos certamente a fazer Matemática."; "Aquilo de que verdadeiramente a Matemática consiste, é de problemas e das suas soluções. Os problemas são o coração da Matemática"; "Não se pode certamente ser matemático sem fazer cálculos. Um matemático por essência e por destino não pode dispensar-se de fazer cálculos." (Anexo 4, episódio 1)

Relativamente à demonstração, Maria José, como vimos, dá-lhe um lugar privilegiado na Matemática. Na sua actividade como professora, reconhece-se a 'fazer Matemática' pois lida com assuntos matemáticos — expressões, teoremas, como exemplificou — e utiliza a dedução, aspecto a que deu destaque especial: "o raciocínio dedutivo é uma característica importante da Matemática" *(entrev. 1, p. 34)*. Para esta professora, vimos já também, a demonstração é a actividade matemática que lhe dá mais prazer. No entanto, em seu entender, trata-se de uma actividade a que os alunos, actualmente, têm dificuldade em aderir e em perceber a sua necessidade. Procurando explicar a eventual má preparação dos alunos que os docentes do ensino superior referem, a professora mencionou uma quebra recente nos níveis de exigência dos professores, justificando essa quebra pelo facto de cada vez haver mais insucesso. Como exemplo, referiu-se, precisamente, à demonstração:

> "Antigamente, por exemplo, eu fazia as demonstrações no 10º e 11º anos e os alunos acompanhavam perfeitamente. Acompanhavam, quer dizer, não estou a dizer todos, mas iam acompanhando a resolução, pronto, de todos os passos da demonstração. E eles agora, cada vez que uma pessoa começa a... a fazer... a querer demonstrar-lhes qualquer coisa, eles acham que aquilo não lhes diz nada, aquelas letras, não é? (...) Aquilo não lhes diz nada. Um teorema para eles não... Pronto, o que lhes interessa é o resultado."
>
> *(entrev. 2, p. 10)*

Talvez por esta razão, como esclareceu, a demonstração não seja uma actividade frequente nas suas aulas:

> Inv. — (...) Esse tipo de actividade costuma acontecer com os alunos ou não?
> MJ. — É assim, sempre que eu posso fazer a demonstração, quer dizer...
> Inv. — Não, mas eles, eles [os alunos]...
> MJ. — Ah, eles tentarem demonstrar? Já fiz uma vez essa experiência...
> Inv. — Eles costumam fazer esse tipo de actividade ou não?
> MJ. — Para eles fazerem sozinhos? Já tentei fazer essa... essa experiência e... e de facto não fui lá muito bem sucedida mas...
> Inv. — Portanto não costumam...

M.J. — Demonstrar sozinhos...
Inv. — ...fazer demonstrações...
M.J. — Não, até porque até agora, vamos lá a ver. Eu fiz isso no 11º e no 10º ano. A nível do 9º ano... há demonstrações a nível, pronto da Geometria. Essas são... são engraçadas de fazer e... e eles... nunca estão assim muito dispostos a fazer a demonstração. E acham que eu é que tenho que as demonstrar.

(entrev. 2, p. 17)

Quanto à aplicação da Matemática e às suas relações com outras disciplinas, recordo que, para Maria José, a Matemática tem uma grande aplicabilidade e todas as ciências se socorrem dela para os seus estudos. Esta foi, saliente-se, uma das qualidades que a professora usou para caracterizar a Matemática, e a que associou o seu gosto pela Trigonometria: "através da Trigonometria, [que] nós conseguimos aplicar em montes de coisas... a... portanto, da vida real, tem tanta aplicação e a... é bonita e é simples" *(entrev. 1, p. 37)*. Usar a Matemática foi também mencionado pela professora, como fazendo parte da actividade matemática: "aplicar determinado assunto à vida real (...) ou noutro assunto qualquer", disse, e "fazer a interligação entre os assuntos, é aplicar... é fazer Matemática" *(entrev. 1, p. 33)*.

Ainda a este respeito, Maria José manifestou, com alguma veemência, a sua discordância perante uma frase que proclamava a inutilidade da Matemática pura e o carácter desinteressante da Matemática com utilidade prática[1]. "Eu aí não posso mesmo concordar", disse, "se alguma parte há que eu não consiga ver qual [a aplicação], [e] mostrar aos alunos qual é o interesse, se calhar fui eu que não soube procurar bem em que é que [ela] se aplica"; e concluiu: "não há nenhum conceito em Matemática que não tenha aplicação" *(entrev. 1, p. 44)*.

Cabe aqui dizer que a professora, quando falou da relação entre a Matemática e as outras ciências, fez notar que, para conseguir uma melhoria da atitude dos alunos para com a Matemática, o professor tem de saber relacioná-la com as suas aplicações, tarefa em que ela própria reconhece ter dificuldades.

---

[1] "Se um problema de xadrez é, em sentido grosseiro, 'inútil', então, tal é igualmente verdade para a maior parte da melhor Matemática (...). Apenas uma pequena parte da Matemática tem utilidade prática e que essa parte é relativamente desinteressante." (Anexo 4, episódio 4)

> "Eu julgo até que a posição de um professor de Matemática, para que os miúdos se sintam mais à-vontade e gostem mais dela [da Matemática], é mesmo fazer essa ponte de ligação. Ligá-la um pouco às outras coisas, e eu tenho imensa pena de muitas vezes não saber determinados aspectos... Não conheço onde é que [ela] se aplica, por exemplo, na Engenharia. Não tenho esse conhecimento, e é pena porque eles às vezes gostavam de saber isso, e gostava de eu própria lhes explicar situações em que isso se aplicasse (...)"
>
> *(entrev. 1, p. 35)*

Numa outra altura, já na segunda entrevista, a propósito da possibilidade de modificar a imagem que muitos alunos têm da Matemática como uma disciplina muito abstracta, a professora voltou a esta questão, sublinhando de novo a importância do trabalho com aplicações da Matemática para melhorar a atitude e a aprendizagem dos alunos na disciplina:

> "Sempre que conseguirmos mostrar aos alunos que de facto ela [a Matemática] se aplica a tudo o que o rodeia, tenho impressão que ele não vai ter dificuldades em... em... recebê-la e... vai sentir que de facto ela faz falta e que os conceitos até são importantes e... (...) Quando nós conseguirmos fazer isso, acho que o sucesso em Matemática vai ser bastante maior. Mas isso implica muito trabalho mesmo..."
>
> *(entrev. 2, p. 7)*

Regressando à questão do cálculo, vale a pena ainda referir elementos com algum carácter paradoxal que se tornaram visíveis ao longo das entrevistas. À primeira vista, segundo Maria José, os alunos não gostam muito de fazer contas extensas — o exemplo das contas de dividir, principalmente se envolverem numerais decimais, foi apresentado como uma das dificuldades dos alunos. No entanto, apesar do esforço que diz fazer para introduzir simplificações nos cálculos, usando processos que diminuam o seu grau de complexidade, verifica que os alunos preferem não os utilizar e realizar os cálculos mais extensos:

> "Eles não gostam de contas muito grandes mas acabam sempre por lá cair. Isso a mim surpreende-me, quando eu... Costumo até dizer, e digo várias vezes, nas aulas: 'eu gosto de ser preguiçosa'. Quer dizer, de tentar simplificar o mais possível, e eles não. Gostam é de fazer [os cálculos], ao fim e ao cabo, gostam de fazer contas grandes (riu-se)."
>
> *(entrev. 2, p. 2)*

A professora recordava aqui uma situação, numa das aulas assistidas, em que esperava que os alunos utilizassem a decomposição em factores primos num cálculo com radicais. Dando um outro exemplo das principais dificuldades dos alunos, destacou a sua rejeição em relação aos problemas — "só o próprio problema, já os faz fugir" *(entrev. 2, p. 4)*, referia-se aqui a problemas do tipo 'pôr em equação' — o que não acontece com o cálculo:

> "O cálculo mesmo, aquela técnica de cálculo, a gente julga que não, que eles não gostam, mas depois de a mecanizarem, que é mesmo o termo, e quando se sentem seguros, eles até nem se importam de fazer cada vez mais."
>
> *(entrev. 2, p. 4)*

A este respeito, falou dos alunos que gostam de resolver equações quando já dominam bem todo o processo de resolução e do que acontece com o cálculo de raízes quadradas. A princípio, como contou, os alunos reagem mal, "detestam", acham "muito esquisito", mas quando dominam a técnica, passam a gostar e "pedem mais e mais e mais", embora, como ressalvou, também a esqueçam com facilidade — "passado um mês esqueceram tudo" *(entrev. 2, p. 4)*.

Na opinião de Maria José, para um certo tipo de alunos, o cálculo e o carácter abstracto da Matemática são os elementos preponderantes na imagem que têm desta ciência:

> "Acham que é uma coisinha muito abstracta, [em] que se trabalha com números. (...) [Onde] a professora põe exercícios muito difíceis, coisas muito grandes e não sei quê. Vêem a Matemática assim. Quer dizer, uma coisa onde se faz contas e onde se tem que... dominar técnicas, ao fim e ao cabo. Alguns... alguns acham que é isso."
>
> *(entrev. 2, p. 5)*

Do seu ponto de vista há razões para os alunos terem esta imagem, pois para os professores é muitas vezes difícil apresentar a Matemática de outra forma. Ela própria assumiu essas dificuldades, reconhecendo que alguns pontos do programa "têm que ser quase que apresentados como domínio de técnicas" *(entrev. 2, p. 6)*. Acrescente-se que Maria José, a propósito dos alunos com mais ou menos 'jeito' a Matemática, reconheceu que o domínio do cálculo tem funcionado como um critério, eventualmente tácito, para distinguir os alunos. "O ter jeito até aqui era ter um bom domínio técnico, não era?", e prosseguiu:

> "Nós dizíamos assim, olha este é bom, e o bom para nós só significava nos testes. Tinha sempre boas notas nos testes e como nós até utilizávamos só cálculos e não sei quê, ao fim e ao cabo, o que nós estávamos ali a tentar testar eram... era o domínio técnico. (...) Eu agora já não penso assim da mesma maneira (...). Nesses testes que fazíamos antigamente, usávamos e abusávamos do cálculo, e ao fim e ao cabo, o que estávamos a medir era a rapidez de... pronto de...
> *(entrev. 2, p. 8)*

Pode-se depreender destas palavras, que Maria José, presentemente, não tem já exactamente a mesma posição sobre este assunto. Todavia, embora relativizando a sua importância, considerou que a facilidade em calcular expeditamente é uma característica dos bons alunos: "Um bom aluno a Matemática tem com certeza também... também é um... também calcula com uma determinada rapidez, se bem que isso não seja, julgo eu, o mais importante de tudo" *(entrev. 2, p. 9)*.

Autonomia e iniciativa. Ainda sobre os alunos que considera terem jeito para a Matemática, Maria José mencionou aqueles que não têm notas muito boas, mas que lhes reconhece facilidade em raciocinar e em analisar situações. Referia-se ao tipo de aluno que consegue muitas vezes compreender coisas que outros não alcançam e realizar, por si só, as suas próprias interpretações, sendo mesmo capaz de colocar questões:

> "É aquele que se apercebe de qualquer coisa que eu estou a dizer, levanta [um]a questão à volta daquilo rapidamente, bem ou mal, mas, quer dizer, sozinho. Ele próprio elabora um modelo, correcto ou não, não importa, mas [é] aquele que vai buscar um pormenor que os outros às vezes não vão buscar e vai fazer uma pergunta, se pode ser assim, se pode ser assado. Eu acho que ele tem jeito na mesma, não é?
> *(entrev. 2, p. 8)*

Para a professora, são alunos capazes de analisar e de raciocinar autonomamente sobre o que lhes é proposto, e com iniciativa para colocar questões: "o aluno pega [na questão do professor] e transforma[-a] e põe questões sobre [ela]" *(entrev. 2, p. 9)*.

Esta valorização da autonomia e da iniciativa no trabalho em Matemática foi retomada quando procurou descrever o que pode caracterizar um bom aluno nesta disciplina. Este aluno, para Maria José, terá que ter uma boa "capacidade de análise e de síntese" *(entrev. 2, p. 9)* para que, como disse, possa encontrar exemplos adequados e conseguir fazer generalizações. Para além disto, e da questão do domínio do cálculo já referida, mencionou também a capacidade de argumentação que valorizou do seguinte modo:

> "É giro [que] por vezes acontecem situações deste tipo: um aluno diz, 'não, isto é assim', e outro diz, 'não porque se for assim, não sei o quê', [e] vai buscar aquilo que eu chamo um contra-exemplo. E quando um aluno consegue de imediato, mal o outro diz uma coisa, ir buscar um aspecto em que isso de facto não se verifica, eu acho que [dá]... um importante passo na Matemática. Ele consegue perceber o que o outro está a dizer... [consegue] pôr-se na pele do outro (...) [e] tentar arranjar uma coisa em que falhe, para provar que o outro está errado. Isto é de facto um... um passo importante. Um aluno que consegue fazer isso é um bom matemático (riu-se)."
>
> *(entrev. 2, p. 9)*

Reconhecendo que muitas vezes se associa imediatamente o raciocínio rápido ao bom aluno, Maria José, no entanto, fez questão em sublinhar a necessidade da referida autonomia no trabalho em Matemática. Para a professora, um bom aluno tem que ser capaz de trabalhar sozinho: "quer dizer, ele tem que fazer coisas por ele, não é, tem que fazer coisas por ele; e quando lhe digo ele tem que fazer coisas por ele é, ele consegu[ir] agarrar nas coisas que digo ou que proponho e trabalh[á]-[las]..." *(entrev. 2, p. 10)*.

A valorização da iniciativa dos alunos também sobressai no comentário que Maria José fez a propósito de um dos episódios fictícios de aula com que foi confrontada[1] que a seguir apresento.

[1] Anexo 4, episódio 10.

'Um aluno reparou que

$$\frac{16}{64} = \frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4} = \frac{1}{4} \qquad \frac{26}{65} = \frac{2\cancel{6}}{\cancel{6}5} = \frac{2}{5} \qquad \frac{19}{95} = \frac{1\cancel{9}}{\cancel{9}5} = \frac{1}{5}$$

e perguntou-lhe se isto acontecia sempre. O que lhe responderia?'

Sendo, como reconheceu, uma situação com que se deparava pela primeira vez e sobre a qual não sabia imediatamente o que dizer ao aluno, Maria José pôs a hipótese de reagir do seguinte modo:

> "Era capaz de [lhe dizer para] irmos os dois estudar porque é que isto era assim e ver se podia acontecer sempre. E, depois de ter trabalhado com ele, ia ele apresentar [n]a aula porque era ele que me tinha trazido isto."
>
> *(entrev. 2, p. 22)*

Podemos ver nesta resposta, que professora transforma a pergunta do aluno numa proposta de trabalho, valorizando deste modo a sua iniciativa, o que ainda reforça mais, com o convite para ser ele próprio, depois, a apresentar o trabalho aos colegas.

Vale a pena aqui referir que, falando de experiências significativas ao longo da sua escolaridade em Matemática, Maria José recordou a sua professora do primeiro e segundo ano da Escola complementar — "talvez [a que] me marcou mais" *(entrev. 1, p. 23)* — cujas aulas descreveu desta maneira:

> "Eram extremamente expositivas, de facto. Ela, ela exprimia-se bem, mas [era] dona e senhora da aula. E depois a prática, e eu agora quando me lembro, rio-me um bocado, era o livro do Palma Fernandes (riu-se) de uma ponta à outra.
> As aulas eram assim, portanto, não havia... grande participação dos alunos. Ela expunha e nós tínhamos que fazer um esforço enorme para acompanhar... o raciocínio dela... a... Depois [era] o Palma Fernandes a complementar. Quando nós não percebíamos a... não

tínhamos sequer a veleidade de lhe perguntar. Isso é, isso é que a mim me marcou bastante, quer dizer, eu acho que..."

(entrev. 1, p. 23)

Ao comentar a situação que descrevera, Maria José apontou aspectos positivos e negativos. O distanciamento da professora em aula e a impossibilidade de uma interacção dos alunos com ela, visando o esclarecimento de aspectos que eventualmente não tivessem sido compreendidos, foram os aspectos negativos mencionados. O professor, disse, "tem que permitir que os alunos falem com ele, que exponham as suas dúvidas (...); o professor [deve ver] o aluno como uma pessoa que quer participar e tem direito a perguntar (...)" *(entrev. 1, p. 23)*. Os aspectos positivos que referiu ligam-se ao facto de a forma de actuação da sua professora a ter obrigado a um trabalho autónomo: "isto pode parecer um contra-senso, mas é verdade, obrigava-me a mim a ir procurar aquilo que não percebia... como eu não lhe podia perguntar a ela, eu tinha que sozinha tentar perceber o porquê" *(entrev. 1, p. 23)*.

Ainda a este propósito, Maria José foi de opinião que, actualmente, é bem possível que ela esteja a menosprezar o valor do trabalho autónomo dos seus alunos. Em seu entender, as actividades que eles realizam talvez sejam demasiado orientadas e, ao perceberem que o professor lhes fornece tudo o que necessitam, não desenvolvem trabalho por si sós: "a gente faz um bocadinho a 'papinha'... encaminhamos assim os raciocínios (...), preparamos as coisas por forma a que eles não tenham grande necessidade em ir buscar a outro lado, [e] portanto [os alunos] fazem o mínimo nesse aspecto" *(entrev. 1, p. 23)*.

As aulas de Matemática

Maria José leccionava Matemática a uma turma do 9º ano, a única turma que tinha desta disciplina. As outras turmas eram do 10º ano e dava-lhes aulas das disciplinas de Métodos Quantitativos e de Tecnologias de Informação. Foram efectuadas observações em dois períodos de uma semana cada, espaçados de um pouco mais de dois meses. Para as observações foram escolhidas duas turmas, a do 9º ano e a turma de Métodos Quantitativos do 10º ano. O primeiro período de observação decorreu pouco depois da primeira entrevista e incidiu sobre quatro aulas consecutivas da turma do 9º ano.

Para a observação das aulas, o encontro com a professora era sempre na sala de docentes da escola. Após o toque indicando o final do intervalo, dirigíamo-nos para o pavilhão onde a aula ia decorrer e a professora recebia o livro de ponto e a chave da sala, entregues pela empregada que estava à entrada. Os alunos aguardavam perto da sala e entravam depois da professora abrir a porta, uns à frente, por sua indicação, outros depois dela, logo a seguir.

No fim de cada aula, decorreu sempre uma entrevista com a professora, incidindo sobre aspectos relacionados com a observação efectuada. A última destas entrevistas incidiu sobre o conjunto das observações realizadas às duas turmas. A apresentação que se segue foi elaborada com base no material recolhido na observação de aulas e nas entrevistas pós-aula. Está organizada em quatro pontos: no primeiro, As turmas, é descrito sucintamente o contexto físico das aulas e são apresentadas algumas características das turmas; no segundo e no terceiro — Estrutura e sequência de aulas e Ambiente de aula, dão-se alguns elementos sobre como as aulas decorriam na sua organização, desenvolvimento e ambiente de trabalho; no quarto ponto, A Matemática nas aulas, apresentam-se os elementos considerados mais importantes relativos à actividade desenvolvida.

As turmas. Os alunos da turma do 9º ano pertenciam ao turno da manhã e as aulas de Matemática decorriam nas primeiras horas (três delas às 9.10), quase sempre na mesma sala (só mudava num dia). O mobiliário era do tipo mais habitual nas escolas: mesas para dois alunos e cadeiras dispostas em filas, quadro preto, um painel de afixação de material na parede oposta e uma mesa para a professora (o mesmo acontecia nas aulas do 10º ano). Numa das salas existia um armário para a disciplina de Matemática, com réguas de madeira pousadas em cima. No seu interior, como me disse Maria José, não existia outro material para trabalho com os alunos. Guardavam-se aí apenas pastas com material dos professores e do grupo de disciplina (testes, legislação, algumas transparências).

As salas tinham uma luminosidade muito boa e estavam sempre muito arrumadas e limpas. Os tampos das mesas não estavam riscados (uma das salas tinha uma parede com algumas palavras escritas) e não se viam papéis no chão. Tendo feito sentir esta minha impressão sobre o estado das salas, Maria José deu-me a entender que há muito cuidado com esse aspecto na escola. Em cada sala, sobre a mesa do professor, havia uma folha (que me mostrou) onde, se for o caso, os professores dão conta de algum estrago ou desarrumação que encontrem na sala, para que possam ser averiguadas as responsabilidades.

A turma do 9º ano tem 28 alunos com um número de rapazes e raparigas sensivelmente igual. Maria José, que dá aulas há dois anos à maioria desses alunos, considerou a turma pouco homogénea, com alunos "muito bons"[1] e "muito fracos", estes com antecedentes de insucesso em Matemática já antigos (alguns dos quais, mesmo de nível um). Existem apenas dois alunos repetentes. No período em que decorreram as observações, a maioria dos alunos esteve sempre presente e entrava na sala com a professora (só um ou outro aluno, e raramente, chegou ligeiramente atrasado). Em geral sentavam-se aos pares, quase todos de rapazes ou de raparigas, e mantinham os seus lugares de aula para aula. Os trabalhos começavam imediatamente, às vezes mesmo antes do segundo toque, com a professora a ditar o sumário.

Relativamente às aulas observadas, Maria José considerou que os alunos estiveram menos participativos do que era hábito, eventualmente devido à minha presença, o que a terá levado a falar com eles sobre esse facto. Disse-me que também ela se sentiu menos à-vontade nas aulas e que os próprios alunos repararam, chegando a dizer-lhe que também ela estava diferente.

A turma do 10º ano tinha também aulas no turno da manhã, e sensivelmente com o mesmo número de alunos, embora o número de rapazes e de raparigas fosse diferente. Nas aulas observadas, faltaram alunos em duas delas (cerca de meia dúzia) e numa alguns chegaram bastante atrasados. Os alunos sentavam-se geralmente dois a dois. Num ou noutro caso, formaram-se grupos de três ou quatro para realizar uma das tarefas propostas.

Falando sobre esta turma, a professora referiu que nos primeiros contactos que teve com os alunos sentiu-os "um bocado revoltados", às vezes mesmo "agressivos", pelo facto de serem obrigados a ter uma disciplina que, apesar do nome, identificavam como a Matemática da qual tinham pensado libertar-se, depois do 9º ano. Disse-me que os alunos reconhecem-na como professora de Matemática e que, no próprio livro de ponto, é com esse nome que a disciplina

[1] As citações da professora utilizadas neste ponto foram extraídas de notas de campo, recolhidas em conversas informais e entrevistas curtas realizadas durante os períodos de observação de aulas.

vem referida. No entanto, considera que a situação — "depois de muita conversa" — foi ultrapassada e pensa que os alunos mudaram a sua atitude: "julgo que [agora] estão a aderir bastante bem".

No princípio do ano, como contou, os alunos encaravam a disciplina de Métodos Quantitativos como uma disciplina transitória em que não tencionavam investir. "Era uma disciplina para acabar no 10º ano e portanto a gente não se vai ralar muito com ela", disse, pela voz dos alunos. Como eles lhe explicaram, viam os Métodos Quantitativos um pouco como a Educação Visual, uma disciplina em que, mesmo sem ligarem muito, acabam todos por passar e, portanto, como uma "disciplina a que não se liga". A mudança de atitude que se verificou, na sua opinião, deveu-se em boa parte ao trabalho apoiado em fichas de actividades e a problemas e jogos que lhes ia colocando nas aulas: "se eu lhes puser um problema para eles pensarem tipo (...) charada, é um desafio para eles, adoram essas coisas". Numa entrevista realizada após uma das aulas observadas, Maria José, fez notar que a atitude actual dos alunos "não tem nada a ver" com o modo como eles reagiam às propostas de trabalho no início do ano. A forma que arranjou para inverter a situação, foi utilizar as fichas de actividades referidas, para, como disse, lhes "despertar a vontade de estar ali, despertar-lhes a vontade de participarem".

Em sua opinião, os alunos desta turma, de um modo geral, não conseguem bons resultados mas são interessados — "são fraquinhos, mas lá têm aquela vontade". Referiu o exemplo de uma aluna que tem muitas dificuldades mas que "faz um esforço enorme", o que a leva a interrogar-se se deve ou não repensar os seus critérios de avaliação. Em relação à turma em geral, considerou que, em termos de resultados finais "não tem sido muito mau" (no 2° período houve apenas seis ou sete negativas e deu uma nota de catorze), mas fez notar que ela própria teve que se adaptar a esta nova situação e ver estes alunos de uma forma diferente: "não os posso ver como alunos de Matemática".

Estrutura e sequência das aulas. Em geral, as aulas observadas tinham fases ou momentos diferenciados, com algumas diferenças entre a turma do 9° e a do 10° ano. No primeiro caso, as aulas começavam sempre com a escrita do sumário que a professora ditava, seguia-se um momento de revisão de assuntos já tratados ou a continuação da aula anterior (podendo ser a realização de exercícios), e, depois, o trabalho sobre o assunto do dia. A parte final da aula era dedicada a exercícios de aplicação sobre o assunto tratado que, se não havia tempo para resolver, constituíam trabalho de casa. Uma das aulas foi totalmente preenchida com a correcção de exercícios que os alunos tinham ficado de realizar em casa.

Se a escrita do sumário, que muitas vezes funcionava como primeiro momento para captar a atenção e promover a concentração dos alunos, marcava claramente o início das aulas, as outras fases sucediam-se sem uma distinção muito clara entre elas, no que se refere à forma como o trabalho decorria, muito semelhante quer se tratasse de uma revisão, da introdução de um novo assunto, ou da resolução exercícios de aplicação. Veja-se, como exemplo, os extractos de registos de aula que a seguir apresento.

Momento de revisão

A professora inicia os trabalhos com uma referência ao assunto dado na aula anterior: "Relativamente à matéria de ontem, chegamos à conclusão que para multiplicar radicais era preciso uma condição. Essa condição era?...". Ouvem-se alunos a responder correctamente à pergunta e a professora escreve no quadro $\sqrt{14} \times \sqrt[3]{49}$, perguntando o que é preciso fazer para se poder efectuar a multiplicação. Enquanto os alunos enunciam a regra, a professora vai escrevendo no quadro, sucessivamente:

$$\underset{(\times 3)}{\sqrt{14}} \times \underset{(\times 2)}{\sqrt[3]{49}}$$

$$\sqrt[6]{14^3} \times \sqrt[6]{49^2}$$

$$\sqrt[6]{14^3 \times 49^2}$$

Nesta altura a professora chama a atenção para a vantagem em fazer as decomposições $14 = 7 \times 2$ e $49 = 7 \times 7$ logo de início, apresentando uma outra resolução em que isso é feito:

$$\sqrt{14} \times \sqrt[3]{49} = \sqrt{2 \times 7} \times \sqrt[3]{7^2} = \sqrt[6]{2^3 \times 7^3} \times \sqrt[6]{7^4} = \sqrt[6]{2^3 \times 7^3 \times 7^4} =$$
$$= \sqrt[6]{14^3 \times 7^4}$$

indicando também $\sqrt[6]{2^3 \times 7^7}$ como outra hipótese para a expressão a que chegou.
Vários alunos vão acompanhando esta resolução respondendo a perguntas da professora e colocando uma ou outra questão.

(registo de aula, 9 de Março)

Introdução de novo assunto

Restava ainda cerca de meia aula quando a professora escreve no quadro a frase "Potência de um radical" e a sequência seguinte:

$$(\sqrt[3]{5})^2 = \sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5^2}$$

Na sala ouve-se alguém a dizer: "$\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{5} = \sqrt[9]{5}$", perante o que a professora chama a atenção para a regra de multiplicação de radicais. Há também uma aluna que faz a pergunta "e não podíamos dar o mesmo radicando?", a que a professora não deu sequência. Em seguida apresenta e resolve outra potência

$$(\sqrt{7})^3 = \sqrt{7} \times \sqrt{7} \times \sqrt{7} = \sqrt{7^3}$$

A pedido de um aluno, iguala depois $\sqrt{7^3}$ a $\sqrt{343}$, radicando que o aluno entretanto tinha encontrado com a máquina de calcular.
Apresentado o último exemplo, uma aluna pergunta à professora se teriam que escrever dez vezes a raiz, caso o expoente fosse 10. Com o exemplo $(\sqrt{5})^{10}$ a professora diz que se pode escrever logo $\sqrt{5^{10}}$ — "escusam de escrever $\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5}$ dez vezes" — e propõe:

$$(\sqrt[3]{2^4})^5 = \sqrt[3]{2^4 \times 2^4 \times 2^4 \times 2^4 \times 2^4} = \sqrt[3]{2^{20}}$$

Uma aluna repara no que está escrito no quadro e diz que basta multiplicar os dois expoentes (do radicando e da raiz). A professora (valorizando a descoberta da aluna) retém o que ela disse e acrescenta que queria que reparassem que a potência não afectava o índice da raiz. Posto isto apresenta a regra geral — "Vamos formalizar" — escrevendo no quadro a sua expressão simbólica.

(registo de aula, 9 de Março)

Resolução de exercícios

A professora, depois de ter ditado o sumário dá início imediato aos trabalhos, escrevendo no quadro o primeiro exercício do trabalho de casa para ser resolvido:

$$\frac{2\sqrt{3}\sqrt{8}}{\sqrt{6}}$$

Uma aluna vai logo ao quadro e escreve:

$$\frac{2\sqrt{24}}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{24} : \sqrt{6} = 2\sqrt{4} = 2\sqrt{2^2} = 4$$

(...) Em seguida pede "voluntários para o 8 a)". Como ninguém se oferece, o que aconteceu por diversas vezes, escolhe ela própria um aluno. "Tem que ser à força", disse brincando. Pede ao aluno que explique o que vai fazer, antes de resolver o exercício.

(...)

Durante a correcção dos exercícios, a professora afasta-se do quadro e acompanha do fundo da sala o que os alunos vão fazendo. Intervém com achegas e esclarecimentos, sobretudo se surgem hesitações, bloqueios ou dúvidas (mesmo quando estas eram colocadas por alunos que estavam sentados).

(registo de aula, 10 de Março)

Verifica-se nos três extractos anteriores que, em cada um dos momentos a que dizem respeito, o tipo de intervenções da professora e a forma com os alunos trabalham é muito semelhante, não existindo grandes diferenças entre os vários momentos.

Nas aulas do 10º ano (nas primeiras, já que a última teve um cariz diferente), foi possível identificar duas fases claramente mais demarcadas, com uma nítida distinção entre elas, na forma como decorria o trabalho (o momento da escrita do sumário não tem aqui a mesma relevância e chega a passar despercebida). Uma das fases correspondia a um trabalho apoiado em fichas[1] que os alunos realizavam agrupados (quase sempre dois a dois) e que a professora acompanhava circulando na sala. A outra, que se lhe seguia, correspondia a um trabalho no quadro de correcção, supervisionada pela

[1] Anexo 11.

professora, do que tinha sido feito na fase anterior. Seguem-se, como exemplificação, alguns extractos dos registos da primeira aula no 10º ano:

Trabalho com uma ficha

Ouve-se o 2º toque já a professora iniciara a distribuição de uma ficha de trabalho e de um mapa da Europa em tamanho A3 em fotocópia (...). Os alunos recebem o material e olham as folhas com alguma curiosidade, enquanto a professora procede à distribuição, anunciando no fim a proposta de trabalho: "Hoje é só para resolver o primeiro [exercício], para ajudar a introduzir a nova matéria que é operações com condições que é o que podem escrever no sumário".

Sugere também que os alunos trabalhem dois a dois e lê o enunciado esclarecendo que se pretende a indicação do conjunto solução para cada caso, acrescentando: "mas não só, [queria] que tentassem relacionar com as operações com conjuntos que vimos na aula anterior". Os alunos escutam a professora quase em silêncio.(...)

Os alunos, debruçados sobre a ficha e sobre o mapa, parecem interessados no trabalho. Trocam constantemente impressões entre eles (por exemplo, discutindo que países fazem fronteira com outro país, quais os países que o oceano atlântico banha) e há sempre alguém a chamar pela professora que vai circulando pela sala. A professora vai atendendo os alunos apoiando-os no trabalho, respondendo aos seus pedidos, tentando esclarecer as suas dúvidas (aparentemente muitos dos apelos à professora têm a ver com o significado dos "e" e "ou" nas proposições dadas). (...)

Quando a professora constata algum problema que considera de interesse geral, dirige-se a toda a turma. (...) Os alunos ouvem os esclarecimentos ou chamadas de atenção e retomam o trabalho.

(registo de aula, 16 de Maio)

Correcção do trabalho realizado

Decorrida meia hora de aula, ouve-se uma aluna dizer que já terminara o trabalho. Pouco depois a professora dá início à correcção dos exercícios (...). Pede um voluntário que se oferece imediatamente e começa a escrever no quadro os conjuntos solução para cada alínea:

a) { }

b) {França, Alemanha, Itália}

c) {Portugal, França, Irlanda}

> Em relação à primeira alínea, enquanto o aluno vai escrevendo, a professora dirige-se à turma dizendo que houve "alguma confusão" pois alguns alunos deram como resposta {Espanha} e Espanha não pertence ao universo considerado: "isto é importante, só podemos usar o universo".
>
> Na sala os alunos olham para o quadro parecendo acompanhar o que o colega vai escrevendo. Um outro aluno a certa altura pede para ser ele a continuar, pedido a que a professora acede (há outros que também pedem para ir ao quadro). (...)
>
> A certa altura a professora interrompe para esclarecer uma situação: "É exactamente nesta que eu queria parar um bocadinho pois houve uma certa confusão". Tratava-se da dificuldade de alguns alunos no significado matemático de "ou". A professora procura o esclarecimento com um exemplo usando a expressão "ir ao cinema ou ao teatro". A explicação parece estar a ser acompanhada pela generalidade dos alunos embora haja alguns que, aparentemente não a estão a seguir. Para as duas outras alíneas a professora escolhe outra aluna e a correcção prossegue no mesmo tom.
>
> *(registo de aula, 16 de Maio)*

Podemos ver assim que, na primeira fase da aula, o trabalho decorre apoiado numa ficha, envolvendo directamente todos os alunos que interagem entre si e interpelam a professora. Esta fase é precedida por um momento em que a professora introduz o trabalho que os alunos vão realizar, dando as instruções e os esclarecimentos que acha necessários. Depois disso, a professora passa a circular pela sala para acompanhar o trabalho dos alunos, responder a solicitações, ou intervir por iniciativa própria, face a algum erro ou dificuldade que detecte. Na segunda fase, o trabalho centra-se no quadro para onde os alunos, um a um, se deslocam para realizar os exercícios sob a supervisão da professora, fazendo perguntas e comentários que acha convenientes e esclarecendo dúvidas que surjam.

A última das três aulas, como disse, foi diferente e não teve fases diferenciadas. Durante toda a aula, a professora manteve-se no quadro corrigindo os exercícios da ficha já iniciada na aula anterior. Os exercícios iam sendo corrigidos, alínea por alínea, pedindo a colaboração dos alunos e esclarecendo dúvidas ou questões que iam sendo colocadas.

Na entrevista depois desta última aula, Maria José, embora considerando que ela não tinha corrido mal e que os alunos acabaram por perceber o que esteve a ser trabalhado, começou por declarar que não a incluía entre as aulas de que mais gosta, dando a entender que prefere aulas como as duas anteriores, em que os alunos estão envolvidos em actividades. "Gosto mais que sejam eles a fazer, a resolver", disse, acrescentando que "teve que tomar as rédeas" *(entrev. pós-aula, 18 de Maio)* na aula em questão, para evitar perder muito tempo.

O sentimento que manifestou em relação à aula, parece, assim, ter a ver com o facto de sentir que conduziu muito os trabalhos e que ocupou muito do espaço na aula, ainda que reconheça que tomou essa decisão por necessidade de poupar tempo e também para proporcionar uma sistematização do que tinha já sido trabalhado, como se pode depreender das suas declarações: "acho que o professor também tem que lhes ajudar a arrumar a cabeça"; "hoje, quando fui para o quadro quase todo o tempo, foi mais no sentido de lhes arrumar a cabeça" *(entrev. pós-aula, 18 de Maio).*

Ambiente de aula e interacções. Em qualquer das turmas houve sempre ambiente de trabalho nas aulas que se iniciavam sem demoras e decorriam sem pontos mortos significativos ou perturbações de carácter disciplinar. Os alunos aparentavam estar à-vontade entre eles e na relação com a professora, tendo inclusivamente ocorrido momentos, na turma do 9º ano, em que alunos e professora 'brincaram' a propósito da tarefa em mãos.

Em geral, a comunicação desenrolou-se toda em torno da professora e a partir das suas intervenções ou solicitações. Assim, particularmente na turma do 9º ano, a interacção principal em aula foi entre a professora e os alunos, sob a forma de um diálogo quase sempre desencadeado pela professora numa relação individualizada ou, mais frequentemente, dirigindo-se a toda a turma. Ilustra-se a seguir cada uma destas situações com extractos dos registos de duas aulas na turma do 9º ano.

Diálogo com a turma

No quadro a professora escreve, ao mesmo tempo que lê "Diz se são verdadeiras ou falsas as proposições":

a) $\sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3}$

b) $\sqrt{-5} = \sqrt[4]{(-5)^2}$

(...)

Conclui, pedindo também a justificação dos resultados: "e não só, o porquê!". Os alunos escrevem em silêncio com ar concentrado. A professora dá tempo e os alunos parecem envolvidos na resolução dos exercícios. Uns minutos depois, a professora inicia a correcção dos exercícios, dirigindo-se sempre à turma em geral:

Professora — Relativamente à primeira [alínea]?
Vários alunos — Verdadeira.
Professora — Porquê?
Vários alunos iniciam simultaneamente a explicação.
Professora — Um de cada vez.

Um aluno dá uma justificação que a professora sanciona e repete de forma ligeiramente reformulada. À frente da alínea respectiva escreve "V". Com as outras alíneas tudo se passou de forma análoga

(registo de aula, 7 de Março)

Diálogo individualizado

[No quadro, a propósito da correcção do exercício que envolvia a multiplicação de dois radicais]

Aluno — [Tenho que] pôr os índices iguais.
Professora — Queres que os índices fiquem iguais. Para quê que queres que os índices fiquem iguais?
Aluno — Para poder multiplicar.
Professora — Para poder multiplicar, sim senhor. E o que é que vais fazer a seguir?
Aluno — Multiplicar.
Professora — Vais multiplicar por quê?

O aluno responde e começa resolver. Vai fazendo correctamente até que chega à expressão $\sqrt[6]{3 \times 4^2} : \sqrt[6]{6}$.

Aluno — E agora?
Professora — Repara na situação que tens e pergunta o que é que tens que fazer. (...) Tens uma divisão de dois radicais e para dividirmos dois radicais havia uma condição que era necessária, que era terem o quê?

Aluno — Os índices.
Professora — O mesmo índice. E até têm!

O aluno prossegue a resolução até ao final sem incorrecções.

(registo de aula, 10 de Março)

Na primeira situação — diálogo com toda a turma — a professora encontra-se quase sempre junto ao quadro, onde procede a apresentação de algum assunto ou à resolução de algum exercício. Daí coloca perguntas ao conjunto dos alunos indiferenciadamente, esperando pelas suas respostas. Há sempre vários alunos a responder, muitas vezes simultaneamente, mas há outros que não intervêm. Na segunda situação — diálogo individualizado — a professora interage directamente com um aluno, em geral interrogando-o sobre o que está a fazer, como meio de proporcionar esclarecimentos ou ultrapassar dificuldades. Esta situação acontece tanto junto ao quadro, se é aí que o aluno realiza a tarefa, como na sala, junto ao lugar do aluno. Os outros alunos, com alguma frequência, tendem a não seguir este tipo de diálogo.

Existindo nesta turma muitos alunos sentados aos pares, houve sempre interacções espontâneas entre eles, a propósito do que se ia fazendo na aula. No 10º ano, estas interacções foram ainda mais visíveis e permanentes, sobretudo durante a realização das tarefas das fichas de trabalho que a professora recomendava serem executadas por pares de alunos (por iniciativa dos alunos, chegaram mesmo a formar-se dois grupos, um com quatro e outro com três alunos). Nesta situação, os alunos trocavam constantemente impressões na tentativa de resolução conjunta dos exercícios. Com frequência, chamavam a professora para os elucidar sobre alguma dificuldade ou dúvida com que se tinham deparado, ou para lhe mostrar os resultados que iam obtendo.

A professora acompanhava o desenrolar dos trabalhos, intervindo se achava necessário para resolver alguma dificuldade, e respondia às solicitações dos alunos. Segue-se um extracto do registo de uma aula que dá conta de uma situação deste tipo na turma do 10º ano, depois da professora ter explicado o que pretendia com a ficha de exercícios que distribuíra no início da aula:

Os alunos começam logo a trabalhar. Debruçados sobre os cadernos, dão ideia de se envolver na realização da tarefa proposta. Interagem mutuamente sobre o que vão fazendo e chamam com frequência a

> professora, para pedir algum esclarecimento ou para mostrar o que já realizaram, ouvindo-se frases como: "veja lá se o meu está certo", "A negação está mal de certeza". Quando a professora não responde logo ao chamamento, os alunos interrompem a sua actividade enquanto aguardam. No entanto, como muitas vezes aconteceu, mal vêem a professora disponível, insistem e chamam-na de novo.
>
> A professora circula pela sala atendendo os apelos dos alunos e intervindo junto deles. Por exemplo, chama a atenção para o que é pedido no exercício com perguntas como: "o que é que eu peço na a)?", "qual é o conjunto solução de $b(x)$?". Dá achegas ou esclarecimentos: dizendo coisas como: "para determinar o conjunto solução de $a(x)$ é preciso encontrar os valores do universo menores que 4", "$b(x)$ *e* $a(x)$ é aquele [conjunto] que verifica em simultâneo $a(x)$ e $b(x)$, tu o que fizeste?", ou ainda chamando a atenção para a operação que há que realizar — "na a) é para determinar a intersecção". Noutros casos, orienta o aluno colocando questões a que o aluno ia respondendo passo a passo, como por exemplo: "primeiro é preciso identificar os conjuntos solução, qual é o de $a(x)$? E o de $b(x)$? (...) Qual é a intersecção?".
>
> *(registo de aula, 17 de Maio)*

O envolvimento e participação dos alunos nos trabalhos da aula foi significativo em ambas as turmas. No 9º ano, no entanto, foi evidente uma diferença importante entre os alunos sentados junto ao quadro e os que se encontravam na parte posterior da sala. Os primeiros intervinham com frequência, em resposta a solicitações da professora ou fazendo-lhe perguntas e pondo-lhe dúvidas. Pareceram sempre atentos e interessados na aula e era geralmente desse grupo de onde saíam os voluntários para as tarefas que a professora pedia para serem feitas no quadro. Isto não acontecia com os outros alunos que, em geral, não pareciam estar a acompanhar os trabalhos. Estes alunos, no entanto, mantinham-se em silêncio e nunca perturbaram a aula. Nos registos de observação efectuados, consta:

> Há bastantes alunos a colaborar mas apenas na metade anterior da sala. Os alunos da parte de trás parecem menos envolvidos e há alguns que não estão a acompanhar o que se vai fazendo e dizendo.
>
> *(registo de aula, 7 de Março)*

> Os alunos sentados mais à frente parecem muito interessados, mesmo curiosos na verificação. Na parte posterior da sala, no entanto os alunos não estão a prestar atenção e não parecem interessados em seguir o que se está a passar na aula.
>
> *(registo de aula, 9 de Março)*

> Manteve-se também o tom geral de participação e de colaboração dos alunos nos trabalhos da aula, com evidente diferença entre os alunos da parte da frente da sala, mais intervenientes, e os da parte detrás que, em geral, não pareciam estar a acompanhar os trabalhos, sem que no entanto perturbassem a aula.
>
> *(registo de aula, 10 de Março)*

Esta situação não se verificou na turma no 10° ano onde o envolvimento geral dos alunos foi elevado, muito em especial na fase em que trabalhavam com base em fichas de trabalho. Na fase de correcção dos exercícios, pareciam seguir o que era escrito no quadro e os comentários da professora mas, por vezes, o envolvimento decaía um pouco nesta fase da aula.

A última aula observada nesta turma, tratou-se, como vimos, de uma aula em que as actividades se desenrolaram em grande parte no quadro, por iniciativa da professora e conduzidas por ela, e em que os alunos seguiam o seu desenvolvimento, por vezes respondendo às solicitações que lhes eram feitas. A professora dirigia-se à turma em geral, solicitando contribuições dos alunos através de perguntas a propósito do assunto ou exercício em mãos ou de questões suplementares. Havia sempre alunos que também colocavam questões ou apresentavam as suas dúvidas à professora.

A Matemática nas aulas. Do ponto de vista temático, as aulas do 9° ano incidiram sobre operações com radicais, e as do 10°, sobre operações com condições. Num e noutro caso, trata-se de assuntos essencialmente relacionados com cálculo, no primeiro caso, cálculo numérico e, no segundo, cálculo em lógica. Sobre o tema tratado no 9° ano, Maria José, pronunciando-se sobre o nível de participação dos alunos nas aulas, considerou que o assunto em questão não ajudava muito — "os radicais é uma matéria difícil de dar" *(entrev. pós-aula, 9 de Março)* — e era um tema de que os alunos não gostavam.

Mais especificamente, no conjunto das aulas observadas no 9º ano foram trabalhados os seguintes tópicos: equivalência de radicais; comparação de radicais com o mesmo índice, com o mesmo radicando e índice diferente, e com radicandos e índices diferentes; e, multiplicação, divisão e potenciação de radicais. No estudo destas operações, foram usados tópicos de outros temas matemáticos já trabalhados, nomeadamente, o teorema de Pitágoras, a área do quadrado, decomposição em factores primos, menor múltiplo comum, regras de potenciação.

Nas aulas do 10º ano, por sua vez, trabalharam-se os tópicos: determinação de conjuntos solução de condições expressas em linguagem corrente (em universos não numéricos, envolvendo situações de conjunção, disjunção e negação de condições); tradução de operações com condições, em operações com conjuntos (e vice-versa); operações com condições em universos numéricos que resultavam da conjunção, disjunção e negação de condições simples e de combinações destas operações; e, as leis de De Morgan.

As tarefas. No 9º ano, a equivalência de radicais foi tratada através da classificação de igualdades do tipo $\sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3}$, $\sqrt{-5} = = \sqrt[4]{(-5)^2}$ ou $\sqrt[9]{27} = \sqrt[3]{3^2}$, em verdadeiras ou falsas. A professora escrevia as igualdades no quadro e pedia aos alunos para as classificarem, solicitando também a justificação do que faziam. A comparação de radicais foi trabalhada começando com radicais com o mesmo índice (por exemplo, $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$; $\sqrt[3]{7}$ e $\sqrt[3]{5}$), depois com o mesmo radicando e índice diferente (por exemplo, $\sqrt{10}$ e $\sqrt[3]{10}$), e, por fim, com radicandos e índices diferentes (por exemplo, $\sqrt[3]{10}$ e $\sqrt{8}$). Tal como procedeu com a equivalência de radicais, a professora escrevia sempre no quadro os exercícios e pedia depois aos alunos para os realizarem e explicarem a razão das suas afirmações.

No estudo das operações, para a introdução da multiplicação, a professora propôs uma 'situação problema' que envolvia a utilização do teorema de Pitágoras para a determinação do comprimento do lado de um quadrado cuja área se pretendia encontrar. O cálculo desse comprimento conduzia a um radical ($\sqrt{32}$), e o da área, ao produto de dois radicais[1].

[1] Esta situação e a forma como foi trabalhada na aula estão apresentadas mais adiante, p. 341.

Ainda no estudo da multiplicação de radicais, a professora pediu o cálculo de produtos em que, de exemplo para exemplo, introduzia uma modificação (no que diz respeito aos índices e aos radicandos dos factores), numa sequência de complexidade crescente $\sqrt{5} \times \sqrt{5}$, $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{5}$, $\sqrt{2} \times \sqrt[3]{8}$ — apresentando, depois do último exemplo, a expressão simbólica para o caso mais geral (a que se seguiu a apresentação da expressão geral para a divisão). Para introduzir a regra de cálculo de potências de radicais, a professora resolveu exemplos, procurando que os alunos se apercebessem dessa regra, apresentando, depois, a sua expressão simbólica.

Após a introdução das regras operatórias, seguia-se a resolução de exercícios para aplicação das regras estudadas. Por exemplo, numa das aulas, para multiplicação e divisão de radicais, assunto tratado na aula anterior, foi pedido aos alunos o cálculo do valor de expressões do tipo:

$$\frac{2\sqrt{3} \times \sqrt{8}}{\sqrt{6}}; \quad \frac{\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{4}}{\sqrt{6}}; \quad \sqrt[3]{4} \times \frac{\sqrt[4]{3^2}}{\sqrt[4]{4}}; \quad \frac{\sqrt{2} \times \sqrt[3]{3}}{\sqrt[6]{8} \times \sqrt[3]{2}}$$

Para a 'redução ao mesmo índice', os alunos determinavam mentalmente o menor múltiplo comum dos índices (foram sempre casos simples) e escreviam entre parêntesis o factor por que, em cada caso, era necessário multiplicar, como a seguir é exemplificado:

$$\frac{\sqrt[6]{6} \times \sqrt[3]{4}^{(\times 2)}}{\sqrt{6}^{(\times 3)}}; \qquad \frac{{}^{(\times 3)}\sqrt{2} \ \times {}^{(\times 2)}\sqrt[3]{3}}{\sqrt[6]{8} \ \times {}^{(\times 2)}\sqrt[3]{2}}$$

Durante as aulas, num caso ou noutro, os cálculos finais foram feitos na máquina de calcular, em geral por iniciativa do aluno a quem a máquina pertencia (e que, aparentemente, era a única na sala).

Nas aulas do 10º ano, para o estudo dos assuntos previstos, os alunos trabalharam com base em fichas de trabalho. Numa delas e com auxílio de um mapa da Europa que a professora também distribuiu, resolveram exercícios em que se pedia a determinação de conjuntos solução de condições expressas em linguagem corrente (por exemplo, determinar os conjuntos dos países tais que

"x tem fronteira com Portugal" e "x é banhado pelo oceano Atlântico). Com os exemplos da ficha de trabalho, a professora relacionou as operações com condições, com as operações com conjuntos, fazendo corresponder situações de conjunção (em que era utilizada a partícula *e*) e de disjunção (em que utilizava o *ou*) às operações de intersecção e reunião de conjuntos, respectivamente (também utilizou a complementação de conjuntos). Em alguns casos, procurando apoiar visualmente o estabelecimento de relações entre as operações de reunião, intersecção e complementação de conjuntos, a professora socorreu-se de diagramas de Venn para representar situações como $A \setminus B$ e $A \cup \overline{B}$.

Com uma outra ficha de trabalho[1], os alunos resolveram exercícios calculando os conjuntos solução de condições simples (por exemplo, $a(x): x < 4$, $b(x)$: $x \geq 2$) num dado universo, de condições que resultavam da conjunção, disjunção e negação dessas condições, e ainda, de condições resultantes de combinações destas operações (por exemplo, $b(x) \wedge \sim a(x)$).

Através de exemplos, a professora procurou que os alunos relacionassem as operações com condições, com as operações com conjuntos. Neste processo, foi pedido aos alunos o cálculo dos resultados de operações com conjuntos (intersecção, reunião e complementação) e de combinações destas operações (por exemplo, $\overline{B} \cup \overline{A}$, $\overline{B \cup A}$).

Foi ainda proposta a tradução de expressões com condições para a linguagem de conjuntos, visando escrever, nesta linguagem, uma das leis de De Morgan, bem como a interpretação de diversas situações com múltiplas combinações de operações com conjuntos como $\overline{B \cup A}$, $\overline{B} \cup \overline{A}$ e $\overline{\overline{B} \cup \overline{A}}$), solicitando expressões equivalentes às apresentadas.

Do exemplo à regra. Na primeira das aulas observadas no 9º ano, ao tratar a comparação de radicais, a professora procedeu como se dá conta no seguinte extracto do registo da aula:

> Escreve no quadro os radicais $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$, deixando entre eles algum espaço e diz:
>
> Professora.— Comparem.

---

[1] Anexo 11.

> Vários alunos (da parte da frente da sala) vão intervindo, alguns em tom de brincadeira, gerando-se risos e boa disposição. (...)
>
> Professora — Quero que digam qual deles é o maior ou o menor.
>
> Vários alunos sabem e dizem que $\sqrt{3}$ é o maior valor. A professora coloca o sinal respectivo no espaço entre os dois radicais. De seguida propõe outro exemplo do mesmo tipo ($\sqrt[3]{7}$ e $\sqrt[3]{5}$) que os alunos resolvem rapidamente. Com o apoio da professora, que alerta para a igualdade dos índices nos casos tratados, conseguem enunciar a regra de comparação de radicais com o mesmo índice.
>
> *(registo de aula, 7 de Março)*

Na verdade, sempre que se tratava de introduzir um tópico novo, a professora começava por um exemplo. Em geral, propunha de seguida um outro, do mesmo tipo, e depois procurava que os alunos se apercebessem do que havia de comum nesses exemplos e enunciassem o que seria uma das regras das operações com radicais.

Este começar pelos exemplos, para deles se 'extrair' a regra, num movimento 'do particular para o geral', equivale a uma abordagem de 'tipo indutivo'. Nesta abordagem utilizada pela professora, é ainda possível identificar um outro movimento, associado ao primeiro, e que podemos descrever como 'do (mais) simples para o (mais) complexo'. Veja-se como, na aula atrás referida, a situação acima mencionada teve seguimento:

> A professora propõe depois um outro exemplo, agora com os radicais $\sqrt{10}$ e $\sqrt[3]{10}$.
>
> Um aluno (de imediato) — $\sqrt[3]{10}$ é maior.
>
> A professora pergunta-lhe porquê.
>
> O aluno — Porque tem que se multiplicar três vezes para dar 10 (ao dizer isto, o próprio aluno verifica que se tinha enganado e que, precisamente pelo que tinha dito, o outro radical era maior).
>
> A situação fica clarificada e a professora diz que vai apresentar uma última situação. Refere que até aí os índices ou os radicais eram iguais.

Ouve-se imediatamente na sala vários alunos dizer "[Agora] é tudo diferente". A professora escreve no quadro os radicais $\sqrt[3]{10}$ e $\sqrt{8}$.

(registo de aula, 7 de Março)

Vê-se assim que a professora começou pelo caso mais simples (dois radicais com índices iguais), subiu um grau na complexidade (índices diferentes mas radicandos iguais), até chegar ao caso mais complexo (índices e radicandos diferentes). Repare-se que os próprios alunos se aperceberam deste percurso quando, no último exemplo, e antes mesmo que a professora o escrevesse no quadro, se antecipam dizendo: "[agora] é tudo diferente". Há assim, nos três casos apresentados sucessivamente, uma abordagem 'do exemplo para a regra' em que, do primeiro para o último caso, a complexidade é crescente.

Esta análise pode também ser ilustrada com a forma como a professora introduziu a multiplicação de radicais: começou com os exemplos $\sqrt{5} \times \sqrt{5}$ e $\sqrt{10} \times \sqrt{10}$, prosseguiu com $\sqrt{8} \times \sqrt{5}$ e $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{5}$, e, por fim, $\sqrt{2} \times \sqrt[3]{8}$. Resolvido o último exemplo, propôs a generalização. "Vamos lá assentar ideias, vamos formalizar" *(registo de aula, 8 de Maio)*, disse escrevendo no quadro $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$. Aqui, ao estabelecimento da regra, do caso geral, associa ainda a ideia de formalização.

Na turma do 10º ano, a abordagem dos assuntos foi semelhante. As operações com condições foram sempre trabalhadas a partir de exemplos, primeiro com condições simples, onde intervinha apenas uma operação, e depois com condições definidas por combinações de operações. Os quatro exercícios iniciais da ficha distribuída na segunda aula observada[1], por exemplo, consistiam em determinar o conjunto solução das condições:

a) $b(x) \wedge a(x)$

b) $b(x) \vee a(x)$

c) $\sim a(x)$

d) $b(x) \wedge \sim a(x)$

com $a(x): x < 4$ e $b(x): x \geq 2$ no universo U= $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

---

[1] Anexo 11.

No trabalho observado nesta turma, é possível ainda entrever uma outra característica na abordagem que a professora utiliza na introdução dos assuntos: um movimento 'do (mais) concreto ao (mais) abstracto'. Na verdade, as operações com condições foram trabalhadas primeiro em universos não numéricos e depois em universos numéricos. Também a abordagem utilizada no 9º ano — do exemplo à regra — pode ser vista como uma abordagem que segue este movimento do (mais) concreto (exemplo numérico), ao (mais) abstracto (regra geral formulada simbolicamente).

Dificuldades dos alunos. Uma das questões abordadas nas entrevistas realizadas depois das aulas incidia sobre as dificuldades dos alunos e visava obter o ponto de vista da professora a este respeito, relativamente ao trabalho realizado nas diferentes aulas.

Referindo-se ao 9º ano, Maria José mencionou as dificuldades dos alunos na equivalência de radicais quando os índices e radicandos são diferentes e, no caso da multiplicação de radicais, sublinhou o facto de eles não terem conseguido efectuar por si sós a passagem de, por exemplo, $\sqrt{5} \times \sqrt{5}$ a $\sqrt{5^2}$ e depois a 5. Considerou também que os alunos, não compreenderam a razão pela qual, para multiplicar radicais, é necessário reduzi-los previamente ao mesmo índice: "eles não percebem porque é que têm que pôr o mesmo índice" *(entrev. pós-aula, 9 de Março).* Em sua opinião, isto talvez se deva à presença de mais um símbolo, o sinal de radical, uma vez que nas operações com potências não identificou este tipo de dificuldade.

De uma outra natureza, foram as dificuldades que Maria José explicitou, dizendo que os alunos não sentem necessidade de factorizar um número para o usar escrito sobre forma de uma potência (ou produto de potências) nos cálculos que têm que efectuar. Na verdade, a aula que professora se refere, começou com um momento de revisão em que foi proposto o cálculo do produto $\sqrt{14} \times \sqrt[3]{49}$. Nessa altura, a professora chamou a atenção dos alunos para a vantagem de começar por fazer as decomposições $14 = 7 \times 2$ e $49 = 7 \times 7$, apresentando de seguida a sequência de cálculo em que isso era utilizado

$$\sqrt{14} \times \sqrt[3]{49} = \sqrt{2 \times 7} \times \sqrt[3]{7^2} = \sqrt[6]{2^3 \times 7^3} \times \sqrt[6]{7^4} = \sqrt[6]{2^3 \times 7^3 \times 7^4} = \sqrt[6]{14^3 \times 7^4}$$

cuja expressão final ainda escreveu na forma: $\sqrt[6]{2^3 \times 7^7}$. No entanto, logo no exercício seguinte, os alunos não viriam a seguir esta recomendação, mesmo tratando-se de um exercício que envolvia os mesmos radicais ($\sqrt{14}$ e $\sqrt[3]{49}$).

De facto, percebeu-se alguma frustração na professora, por não ter conseguido fazer sentir aos alunos a vantagem da decomposição dos números e da utilização de potências: "Não consegui transmitir com força suficiente que as potências ajudam, não complica[m], simplifica[m]" *(entrev. pós-aula, 9 de Março)*. Como explicou, o exercício com que começou a aula, pretendia exactamente fazer sentir aquela vantagem. No entanto, constata que os alunos não usam a decomposição e, quando se deparam com uma potência, têm tendência a calcular o seu valor, perdendo muito tempo com isso. Em seu entender, se este procedimento pode não ter más consequências quando estão em jogo números pequenos, verifica que em exercícios com números "mais rebuscados", os alunos "enterram-se logo" *(entrev. pós-aula, 9 de Março)*.

Sobre os erros que foram cometidos pelos alunos, Maria José referiu-se a eles como oportunidades para tratar dificuldades e formas de proceder incorrectas, mais habituais. Prefere, no entanto, que o erro surja naturalmente, não gostando de o provocar, com receio de levar alunos "que não tinham pensado nele, a fazê-lo" *(entrev. pós-aula, 10 de Março)*.

Num balanço final das aulas do 9° ano, a professora disse estar "mais descansada", considerando que eles apreenderam a regra da multiplicação de radicais: "no fundo, no fundo, eles percebem qual é a condição essencial para se multiplicar [radicais]" *(entrev. pós-aula, 10 de Março)*. As principais dificuldades que identificou, associou-as a problemas de cálculo cuja origem localiza em anos anteriores, e voltou a lamentar não ter ainda conseguido que os alunos reconheçam a importância e a vantagem da utilização da decomposição em factores primos. Não se mostrou, no entanto, demasiado preocupada.

Em relação à turma do 10° ano, Maria José referiu-se a aspectos relacionados com a linguagem matemática, não apenas simbólica, mas também a que se exprime por palavras. "Tenho que falar de forma muito simples e muito clara" e deu o exemplo: "quando digo 'estabelecer relação entre conjuntos', isto não faz parte do seu vocabulário e tenho que lhes dizer exactamente o que quero dizer com a palavra 'relação'" *(entrev. pós-aula, 16 de Maio)*.

Um outro exemplo que mencionou, também ao nível da linguagem, foram os problemas criados nos alunos pelos diferentes significados que certas expressões têm em Matemática e na linguagem corrente (particularmente o *ou*, o *se... então*). Envolvendo ainda aspectos de linguagem, Maria José mencionou as dificuldades dos alunos com questões de "notação" o que, em sua opinião, perturbam a sua "organização de raciocínio", dando como exemplo: "se eu tenho a condição $a(x)$, fazer com que o [seu] conjunto solução seja [designado por] A e não seja C.S. para todos [os casos]" *(entrev. pós-aula, 17 de Maio).*

A professora refere-se aqui ao procedimento de uma aluna quando foi ao quadro apresentar a sua resposta a alguns exercícios. Tratava-se de calcular os conjuntos solução de diferentes condições — do tipo, $a)\, x<4 \wedge x \geq 2$, $b)\, x \geq 2 \vee x<4$, $c)\ \sim(x<4)$, etc. — no universo U= {1, 2, 3, 4, 5, 6}) e a aluna deu as respostas, utilizando C.S. como abreviatura de 'conjunto solução', escrevendo:

a) C.S. {2, 3}

b) C.S. {1, 2, 3, 4, 5, 6}

c) C.S. {4, 5, 6}

Na altura a professora sugeriu à aluna que não usasse as letras C.S. pois, como disse, desse modo "parece tudo igual", lembrando-lhe a notação das letras maiúsculas para os conjuntos — "só para afinarmos ideias" *(registo de aula, 17 de Maio).* A intenção era evitar possíveis confusões em exercícios posteriores que usavam combinações das diversas condições.

Para além das dificuldades já enumeradas, Maria José, referindo-se à tradução de condições para conjuntos, considerou que entre os alunos terá havido quem se limitasse a memorizar. A este propósito contou que gosta de propor exercícios "ao contrário", isto é, dos conjuntos para as condições: "gosto que eles passem de uma forma para a outra, a operação inversa é sempre mais difícil" *(entrev. pós-aula, 18 de Maio).* Procede do mesmo modo em outro tipo de situações, como nos casos notáveis da multiplicação, referindo que os alunos têm mais dificuldades na factorização do que em desenvolver o caso notável, pelo que propõe sempre exercícios que os obrigam a trabalhar nos dois sentidos. Este tipo de dificuldade foi também exemplificado com a tradução das leis de De Morgan em termos de conjuntos.

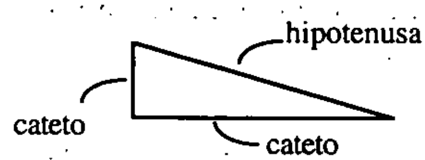
A propósito da utilização de diagramas de Venn, a professora considerou que certos dos alunos têm dificuldades de visualização e que para alguns deles os diagramas não são evidentes. Explicou que os alunos com este tipo de dificuldade preferem memorizar, acrescentando: "não percebem no diagrama, preferem decorar, para eles é mais fácil decorar e dizem-me assim: ó stora, o 'não e' dá 'ou com dois nãos'?" *(entrev. pós-aula, 18 de Maio).*

A importância do raciocínio. Nas entrevistas pós-aula coloquei a questão sobre se os alunos tinham estado a 'fazer Matemática' nas aulas. Nas duas turmas, Maria José manifestou-se globalmente no sentido afirmativo e apenas foi muito reticente relativamente a uma das aulas do 9º ano. Em relação a esta aula manifestou reservas sobre o carácter matemático da actividade dos alunos, por considerar que o trabalho que realizaram decorreu mais ao nível da mecanização, do que da compreensão: "não fiquei com a certeza que eles tivessem percebido, tivessem, por exemplo, sentido a necessidade de simplificação; para eles foi mais o mecânico" *(entrev. pós-aula, 9 de Março).*

Nas respostas que a professora foi dando, quando confrontada com a questão atrás mencionada, pode perceber-se a valorização de alguns ingredientes na actividade dos alunos, assumindo-os como uma espécie de critérios que a levavam a decidir no sentido afirmativo ou negativo. Pronunciando-se sobre o 9º ano, e falava da primeira das aulas observadas, Maria José não hesitou perante a questão colocada — "claro, quando estiveram a pensar comigo" — tendo mesmo dito que "sempre que se pensa, faz-se Matemática, até quando se brinca em determinados jogos" *(entrev. pós-aula, 7 de Março).*

Mais especificadamente, deu como exemplos o momento da aula em que um aluno, ao explicar porque considerara $\sqrt[3]{10}$ maior que $\sqrt{10}$, se apercebe do seu engano (ver registo de aula, p. 332), e aquele em que os alunos reconhecem que uma equação que tinham ditado para a professora, era uma equação impossível, momento que o seguinte extracto do registo da aula descreve:

> A professora desenha no quadro um triângulo rectângulo e identifica os catetos e a hipotenusa.



E, usando os valores [que já tinha dado], escreve $6^2 = 2^2 + x^2$. Ouve-se depois na sala

Alguns alunos — $x^2 = 4 - 36$.

A professora deixa passar o erro e escreve no quadro aquilo que os alunos ditaram, mas refere que se vai obter um número negativo no 2° membro da equação.
Os alunos dizem então que a equação não é possível. A professora corrige o erro escrevendo $x^2 = 36 - 4$ e depois a $x^2 = 32$.

(registo de aula, 7 de Março)

De uma outra aula, destacou em particular o episódio de uma aluna que pensava ter chegado a um resultado diferente daquele que uma colega acabava de apresentar no quadro, e depois se apercebeu que se tratava do mesmo valor:

Numa aula de resolução de exercícios, uma aluna resolve no quadro um deles escrevendo:

$$\sqrt[6]{\frac{2^3 \times 3^2}{2^5}} = \sqrt[6]{2^{-2} \times 3^2} = \sqrt[6]{(\frac{1}{2} \times 3)^2} = \sqrt[3]{\frac{1}{2} \times 3} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$$

Uma aluna (do lugar) — Eu fiz diferente.

A professora vai ver. Manda-a depois ao quadro dizendo em voz alta:

Professora — A Ana chegou a um resultado diferente. (...)

No quadro, a aluna, escreve:

$$\sqrt[6]{\left(\frac{1}{2} \times 3\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}} = \sqrt[6]{2{,}25}$$

e no decurso da resolução que apresenta, a certa altura apercebe-se que não há nenhum erro e diz isso à professora.

Professora — Continua.

A aluna (explicando) — Estava a usar (apontando) $\sqrt[6]{2,25}$ em vez de $\sqrt[3]{3/2}$ e portanto 2,25 deve ser o quadrado do 3/2.

(registo de aula, 10 de Março)

Na entrevista depois da aula, Maria José refere-se a esta aluna como tendo realizado "um raciocínio extremamente válido", e acrescenta: "percebeu a equivalência de radicais e apercebeu-se que ali tem mesmo que estar o quadrado do [outro] valor; (...) acho que é um raciocínio [a] que a maioria dos alunos não vai lá" *(entrev. pós-aula, 10 de Março)*.

No 10º ano, Maria José usou também o mesmo critério e a palavra 'raciocínio' apareceu frequentemente, sempre que se tratava de justificar que os alunos estiveram a 'fazer Matemática'. Quando se pronunciou sobre a primeira aula, por exemplo, referiu-se, nos seguintes termos, ao caso de uma aluna que, ao explicar o que tinha acabado de fazer no quadro, verificou que se tinha enganado: "[a aluna] está de facto a raciocinar, está a formular um juízo, está a formular um raciocínio e para mim isso é fazer Matemática, não tem que ser só com valores numéricos" *(entrev. pós-aula, 16 de Maio)*. E, quando apreciou a segunda aula a este respeito, manifestou a opinião seguinte: "estiveram a fazer Matemática quando raciocinaram comigo" *(entrev. pós-aula, 18 de Maio)*.

Para além disso, analisando o conjunto das aulas do 10º ano, Maria José escolheu a primeira como sendo aquela em que os alunos fizeram mais Matemática, tendo justificado assim a escolha:

> "A matéria era nova e eles acabaram por responder a todas as questões (...) e acabaram por... sei lá... estabeleceram relações sozinhos. A única coisa que eu fiz foi um guião, de resto aquelas operações todas surgiram-lhes quase que naturalmente. Eles elaboraram o raciocínio, tentaram chegar a uma conclusão. Houve alunos que fizeram sair logo as operações com conjuntos (...) relacionando-as com as condições. Estiveram a elaborar para eles o seu próprio modelo... matemático (...) e houve alunos para quem, desde o primeiro dia, ficou perfeitamente definido que de facto a conjunção de condições resulta,

em termos de conjuntos, numa intersecção (...). Julgo que aí construíram..."

(entrev. pós-aula, 18 de Maio)

Autonomia e iniciativa. Na explicação anterior da professora, para lá da valorização do raciocínio, podemos simultaneamente entrever outros ingredientes na justificação que apresentou. Os alunos, diz Maria José, "estabeleceram relações sozinhos", "tentaram chegar a uma conclusão", "fizeram sair" as operações com conjuntos, elaboraram o "seu próprio modelo matemático". Com estas palavras, a professora parece valorizar um outro elemento na actividade matemática: a autonomia do aluno, a que por vezes associa a iniciativa e o empenhamento do aluno no trabalho que realiza.

Veja-se, por exemplo, o episódio há pouco mencionado que envolvia uma equação impossível. A professora deu-o como exemplo, considerando que o o que os alunos "tiraram sozinhos" *(entrev pós-aula, 7 de Março)* correspondia a fazer Matemática. Veja-se, também, a explicação que apresentou, sobre as razões porque considerara que nas duas últimas aulas do 10º ano, os alunos fizeram menos Matemática. "Quando eu digo fazer Matemática, é a pessoa (...) estar empenhada, trabalhar todo o tempo", disse a professora, acrescentando que, na primeira aula, os alunos "não se limitaram pura e simplesmente a copiar o resultado de alguém... construíram, uns individualmente, outros em grupo espontâneo" *(entrev. pós-aula, 18 de Maio)*. Na segunda aula, em seu entender, os alunos tiveram mais dificuldade na interpretação das questões e não estiveram tão independentes na sua resolução, tendo havido, de facto mais alunos a solicitar o apoio da professora. Considerou, por isso, que o percurso que descreveu como "interpreta sozinho, escolhe as estratégias [ou] o caminho a seguir, resolve [a questão]" *(entrev. pós-aula, 18 de Maio)*, não foi realizado pelos alunos tão autonomamente, "tão sozinhos", para usar a sua expressão.

Também as referências ao acto de pôr dúvidas, e ao facto de os alunos não se limitarem a responder às perguntas do professor, quando procurava dar exemplos de momentos em que os alunos estavam a fazer Matemática, indiciam, da parte da professora, a valorização da autonomia, da iniciativa e do empenhamento dos alunos. Dá-nos ainda a mesma indicação, quando fez notar que, perante resultados ou respostas avançados pelos alunos, evita dar uma sanção imediata — "prefiro que eles me expliquem (...) não digo logo nem que sim, nem que não" *(entrev. pós-aula, 18 de Maio)* — e procura confrontá-los com as suas afirmações, dizendo-lhes: "não sei se está bem se está mal, vão comentar e vamos chegar à conclusão se está certo ou errado" *(entrev. pós-aula, 18 de Maio).*

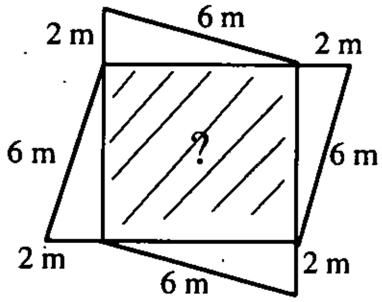
Confrontada com o facto de os alunos, muitas vezes depois de chamarem a professora, interromperem o trabalho enquanto não eram atendidos, considerou que isso acontecia por sua responsabilidade. "É defeito meu", disse, acrescentando que tem tendência para se prestar a ser "bengala" *(entrev. pós-aula, 16 de Maio)* e que tem dificuldade em dominar essa tendência, o que leva os alunos a contar com isso. Referiu no entanto que o facto de andar pela sala a apoiar os alunos lhe permite aperceber-se melhor das suas dificuldades.

Compreensão e mecanização. Solicitada a fazer uma espécie de balanço incidindo sobre a actividade matemática dos alunos no conjunto das aulas nas duas turmas, Maria José considerou que, no caso do 9º ano, os alunos realizaram sobretudo actividades de cálculo e que os objectivos do trabalho eram "o domínio da técnica" de operações com radicais *(entrev. pós-aula, 18 de Maio).*

Analisando as aulas observadas, este "domínio da técnica" que a professora refere ter procurado desenvolver nos alunos, parece significar a utilização expedita, por parte dos alunos, das regras de cálculo, com a compreensão dos processos e técnicas utilizados. Podemos ver imbuídos desta intenção, determinados procedimentos da professora, como, por exemplo, a utilização de uma 'situação problema' no 9º ano para introduzir a multiplicação de radicais, e, no 10º ano, o recurso a apoios intuitivos de carácter visual, para o trabalho com operações com conjuntos, descritos nos seguintes extractos de registos de aula:

Situação problema

A professora escreve no quadro "Multiplicação de radicais". Faz um desenho que representa um jardim, com "florinhas", de que se quer saber "rigorosamente" a área da figura central (durante esta apresentação, há risos e gracejos bem dispostos na sala). São dadas as medidas indicadas e é dito que os lados da referida figura são perpendiculares [2 a 2].



(...)

Os alunos parecem dedicados ao trabalho com algum entusiasmo. A professora segue o trabalho que realizam circulando entre eles. Verificando que havia alunos que não se lembravam do teorema de Pitágoras vai até ao quadro, desenha um triângulo rectângulo, identifica os catetos e a hipotenusa e, usando os valores da figura do jardim, escreve a equação que os relaciona — $6^2 = 2^2 + x^2$ — (...) chegando depois a $x^2 = 32$.

> Professora — Quais são os números que ao quadrado dão 32?
>
> Alguns alunos — $\sqrt{32}$
>
> Outros alunos (acrescentando) — $-\sqrt{32}$

A professora fez notar a impossibilidade do valor negativo e passa depois para o cálculo da área do quadrado. Escreve no quadro $\sqrt{32} \times \sqrt{32}$, ouvindo-se um aluno (que tem máquina de calcular) dizer que é 32. A professora diz que ele usou a máquina, pergunta, "como chegar aí?", e continua o cálculo da área escrevendo:

$$\sqrt{32} \times \sqrt{32} = (\sqrt{32})^2 = 32$$

Parecendo ter a sensação que os alunos não a estão a seguir, a professora reescreve $(\sqrt{32})^2 = 32$ e usa a mão para tapar o sinal $\sqrt{\ }$ em $\sqrt{32}$ (aparentemente com o objectivo de fazer ver que entre parêntesis fica o número que elevado ao quadrado dá 32, ao mesmo tempo que pergunta em que consiste a raiz quadrada de um número. Ainda antes do toque para a saída, a professora apresenta dois outros exemplos — $\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5$ e $\sqrt{10} \times \sqrt{10} = 10$ — tentando que os alunos reparem no passo intermédio:

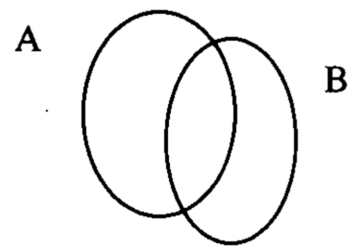
$$\sqrt{5} \times \sqrt{5} = \sqrt{\mathbf{5^2}} \text{ e } \sqrt{10} \times \sqrt{10} = \sqrt{\mathbf{10^2}}.$$

(registo de aula, 7 de Março)

Apoios intuitivos visuais

Para verificar se $A \setminus B$ pode ser representado por $A \cup \overline{B}$ (que um aluno tinha sugerido), a professora desenha no quadro um diagrama e procura que, com o apoio do desenho, os alunos verifiquem que a hipótese colocada não é verdadeira.

Professora — Talvez fazendo um desenho ilustrativo:

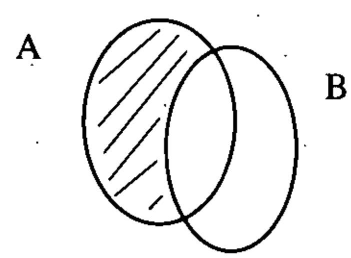


Professora — Tenho um conjunto A e vou tirar uma parte. Ao A tiro o B.

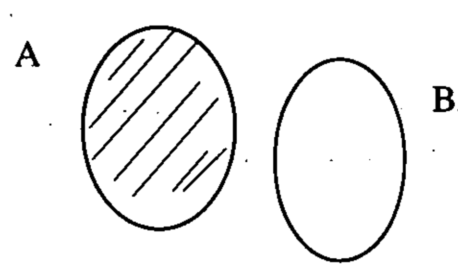
Um aluno — Fica só o A.

Professora — És capaz de vir representar.

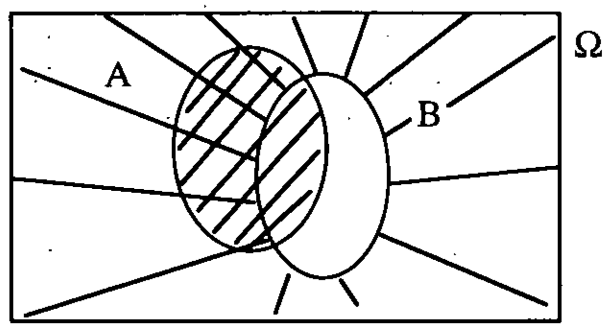
O aluno vai ao quadro e faz bem, ficando:



Nesta altura a professora desenha o caso dos conjuntos serem disjuntos e pergunta como seria nessa situação. O aluno responde bem e traceja o conjunto A.



A professora retoma a hipótese que o aluno tinha colocado — "vamos [então] tentar representar $A \cup \overline{B}$"— e desenha:



Em seguida pergunta "o que ficou riscado?" e conclui com os alunos que o diagrama [anterior] representa $A \setminus B$ "porque há a intersecção". Ouve-se então uma aluna a dizer [por palavras] $A \cap \overline{B}$ e a professora vai escrevendo no quadro o que ela diz. No fim pergunta "toda a gente concorda?". Na sala há alunos que dão o seu assentimento (alguns abanam afirmativamente a cabeça) e a professora termina registando: g) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

(registo de aula, 17 de Maio)

Com a 'situação problema' que a professora propôs, pretendeu que os alunos chegassem a uma situação de multiplicação de radicais e, assim, de alguma forma dar sentido à aprendizagem da regra. Na entrevista que se seguiu à aula, Maria José disse ter tido dificuldades em arranjar uma boa situação para introduzir a dita regra e considerou que a que veio a utilizar não funcionou muito bem (referia-se ao facto de os alunos não terem conseguido efectuar por si sós a passagem de $\sqrt{32} \times \sqrt{32}$ a $\sqrt{32^2}$, chegando depois a 32). A este propósito, referiu a tendência em usar expedientes do tipo "tapa-destapa", como aconteceu na aula, associando este expediente ao "corta-corta" que se usa quando o radical está elevado a um expoente igual ao seu índice (e também na redução de termos semelhantes) *(entrev. pós-aula, 7 de Março)*. Veja-se, como ilustração, os seguintes extractos de registos de aula:

Após a professora ter ditado sumário, ouve-se uma aluna perguntando algo como "desembaraça-se de índices, como se desembaraça de denominadores?". A professora não responde, retoma a pergunta e lança-a à turma: "alguém é capaz de responder?".

Vários alunos respondem ao mesmo tempo e não se percebe o que dizem. Ouve-se a professora: "Em algum caso desembaraçaram de índices?. Entre algumas respostas ouve-se um aluno dizer: "no caso do corta-corta". A professora pede então um exemplo a este aluno, mas é ela própria quem escreve no quadro $(\sqrt[3]{4})^3$ e que 'corta' o índice e o expoente e iguala a 4, ficando:

$$(\sqrt[\cancel{3}]{4})^{\cancel{3}} = 4$$

Conclui, dirigindo-se à aluna que colocara a questão inicial: "Está satisfeita?"

(registo de aula, 8 de Março)

Durante a correcção de um exercício alguém na sala parece não ter percebido a passagem

$$\ldots\sqrt[\cancel{2}]{2^{\cancel{2}}} = 4$$

e a professora diz (referindo-se ao *desaparecimento* do sinal de radical)

Professora — Ela fez o 'corta-corta'.

(registo de aula, 10 de Março)

Com a utilização dos diagramas a professora pretendeu 'concretizar' visualmente a situação proposta e desse modo favorecer a sua compreensão por parte dos alunos. Referiu no entanto que há alunos que não conseguem perceber os diagramas e que preferem memorizar. Recordo o exemplo que a professora deu do aluno que lhe pergunta, referindo-se à negação da conjunção de condições: "ó stora, o 'não e' dá 'ou com dois nãos'?" (ver p. 337). Podemos ver na frase deste aluno algum paralelismo com o 'tapa-destapa' ou o 'corta-corta' referidos a propósito das operações com radicais. Em qualquer dos casos, procura-se um apoio que ajude a memorizar uma regra ou uma técnica.

Um outro recurso que a professora utilizou para favorecer a compreensão dos alunos foi a utilização de analogias com assuntos já estudados. Aconteceu no 9° ano na redução de radicais ao mesmo índice quando evocou a redução ao mesmo denominador (analogia em que uma aluna já tinha reparado), mesmo na forma como dispunha o cálculo no quadro:

$$\sqrt{2} \times \sqrt[3]{8} = \sqrt[6]{2^3} \times \sqrt[6]{8^2} = \sqrt[6]{2^3 \times 8^2}$$
$$(\times 2)\ (\times 3)$$

Ou ainda, no mesmo ano, quando, para corrigir o erro de uma aluna no cálculo do valor de uma fracção com radicais, recorreu a uma situação semelhante com fracções mas sem radicais:

> A professora propõe um exercício, em tom de incitamento: "Desafio já! Vão tentar resolver este exercício" (entretanto escrito no quadro):
>
> $$\frac{\sqrt{14^3} \times \sqrt{49}}{\sqrt{28}}$$
>
> Passados uns minutos, tendo detectado numa aluna o erro
>
> $$\frac{\sqrt{14^3}}{\sqrt{28}} \times \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{28}},$$
>
> a professora escreve-o no quadro, e faz sobressair o erro cometido com um exemplo sem radicais:
>
> $$\frac{6}{5} = \frac{2 \times 3}{5}$$
> $$\frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$$
>
> *(registo de aula, 9 de Março)*

No 10° ano, a professora recorreu à linguagem corrente para clarificar significados matemáticos, como por exemplo no caso da disjunção matemática *ou* — "ir ao cinema *ou* ao teatro" *(entrev. pós-aula, 16 de Maio)* — ou, no caso das operações com conjuntos, a intersecção como o conjunto dos elementos comuns, e a reunião como o conjunto de todos os elementos.

Como forma de controlo da aprendizagem que pretendia desenvolver nos alunos, a professora pedia-lhes com frequência que explicassem a resolução do exercício que faziam no quadro ou justificassem a resposta que davam. Este tipo de actuação assumia, muitas vezes, formas de um diálogo com os alunos, como aconteceu em situações que constam nos registos de aula das páginas 324 e 325, ou na que a seguir se dá conta:

> Ao fim de algum tempo a professora inicia a correcção dos exercícios, pedindo a alunos para irem ao quadro:
>
> Professora — Um voluntário?
>
> Uma aluna oferece-se para o exercício $\sqrt[3]{10}:\sqrt[3]{2}$ e escreve o resultado que obteve: $\sqrt[3]{5}$.
>
> Professora — És capaz de explicar?
> Aluna — Dividi o 10 pelo 2 e dei o mesmo índice.
>
> *(registo de aula, 8 de Março)*

Do conjunto das situações apresentadas, ressalta uma espécie de tensão entre compreensão e mecanização na ênfase que é dada à aprendizagem. Mesmo tratando-se essencialmente da aprendizagem e utilização de regras e técnicas de cálculo, percebeu-se, na professora, a valorização da compreensão, "do porquê", como dizia, dessas regras e técnicas por parte dos alunos. E, simultaneamente, a consciência de que, em muitos casos, com alguma facilidade, a mecanização tende a sobrepor-se, conduzindo a um predomínio da memorização face à compreensão. Podemos interpretar o tipo de actuação da professora que se ilustra no registo anterior, como uma forma de contrariar, ou contrabalançar, essa tendência.

Discussão

A escolha da Matemática e da profissão

Maria da Graça e Maria José, as duas professoras participantes neste estudo, são ambas professoras em escolas secundárias de Lisboa. Tiveram o mesmo tipo de formação inicial, uma licenciatura em Matemática no ramo educacional, concluída na mesma instituição, com poucos anos de intervalo. Actualmente têm bastantes anos de experiência no ensino da Matemática.

Pelo que declararam Maria da Graça e Maria José, vir a ser professoras não era uma opção definida para o seu futuro profissional. A primeira, como vimos, no fim do Liceu, estava ainda muito dividida na escolha entre vários cursos, incluindo Engenharia. A segunda, tinha mesmo em mente seguir um outro curso, Medicina ou Física nuclear, projectos de que veio a desistir, no último caso por razões económicas e no primeiro por sentir que esse curso a limitava na assistência que pretendia dar à família.

No que diz respeito à escolha da Matemática, embora as duas professoras tenham evocado um gosto por esta disciplina que se manifestou relativamente cedo, e uma relação positiva e de sucesso no ensino pré-universitário, essa escolha também não decorreu de uma preferência nítida e exclusiva da Matemática face a outras disciplinas. Na verdade, entre as suas predilecções disciplinares escolares, encontravam-se diferentes ciências, aparentemente em pé de igualdade. Maria José disse mesmo que poderia ter seguido uma variedade de cursos e Maria da Graça fez sentir que poderia ter escolhido também um curso de Física. Como contou esta última professora, na sua decisão pela Matemática, terá pesado o facto de algumas colegas suas terem escolhido a licenciatura nessa disciplina e, com essa opção, podia sentir-se acompanhada, ao iniciar um novo percurso escolar.

A escolha da licenciatura em Matemática e do ensino como carreira profissional são, nas duas professoras, indissociáveis, como é particularmente claro no caso de Maria José que disse ter-se inscrito no curso para ser professora. Com esta profissão, tinha a ideia que teria mais disponibilidade para dar apoio à sua família e, ao mesmo tempo, poderia satisfazer o gosto pelo ensino que as explicações particulares que começara a dar, ainda aluna, lhe fizeram sentir. Maria da Graça, ao entrar na Faculdade, trazia também já em mente vir a ser professora, escolha que o seu ambiente familiar favorecia, sobretudo pelo lado do seu pai que a via com bons olhos nesta profissão. Assim, para usar as suas palavras, acomodou-se à ideia de vir a dar aulas, indo ao encontro também do seu gosto no relacionamento com pessoas e de uma profissão independente, bem como do gosto pelo ensino que disse ter e cuja origem também associou às explicações que dava ainda estudante.

Se podemos considerar que no ensino pré-universitário as professoras tiveram uma relação globalmente positiva com a Matemática e um percurso de sucesso nesta disciplina, tal não aconteceu no ensino superior e de uma forma especialmente nítida no caso uma delas. Maria José, por exemplo, embora declarasse que o ensino superior não alterou a sua relação com a Matemática que vinha do ensino secundário, deu a entender que na Faculdade não se sentia tão à-vontade em algumas disciplinas matemáticas, passando por vezes por dificuldades que até aí não tinha conhecido. Maria da Graça, por sua vez, teve mesmo uma forte desilusão com os primeiros anos na vertente científica do curso, que qualificou de demasiado teórica, chegando por isso a lamentar não ter seguido um curso de Engenharia que considerava mais prático. Manteve no entanto a escolha, optando pelo ramo educacional, pois previa maior facilidade em arranjar emprego como professora, e também porque via esse ramo do curso como mais acessível.

Evolução profissional

Reflectindo sobre os seus já largos anos de experiência no ensino da Matemática, as professoras reconheceram terem ocorrido algumas mudanças significativas em certos aspectos da sua prática lectiva, ao longo desses anos. Pelo que ambas disseram, essas mudanças decorreram, essencialmente, da aquisição de um sentimento de maior segurança concomitante com o maior conhecimento dos programas de Matemática e dos alunos, e traduziram-se em modificações na forma de abordar os assuntos matemáticos em aula e no papel atribuído aos alunos na aprendizagem, bem como na interacção e relacionamento com eles.

Maria José salientou por exemplo que, nos primeiros anos como professora, sentia um constrangimento muito forte para cumprir o programa, o que a levava a privilegiar uma abordagem expositiva no tratamento dos tópicos matemáticos, e reconheceu que, com essa abordagem, nem sempre conseguia um verdadeiro envolvimento dos alunos, nem a sua compreensão dos assuntos matemáticos abordados. Actualmente, sentindo-se mais liberta desse constrangimento, dá maior valor à necessidade desta compreensão e, por isso, mais espaço e importância à participação e intervenção dos alunos, procurando actuar de forma a proporcionar-lhes mais autonomia no desenvolvimento das suas aprendizagens. Para além disso, a confiança que foi adquirindo, depreende-se das suas palavras, tornou-a mais tolerante face a atitudes e comportamentos dos alunos e com mais capacidade para os compreender e integrar melhor na sua forma de actuar.

Para Maria da Graça, os anos de experiência de ensino terão sobretudo contribuído para a aquisição de uma visão global dos programas, o que lhe permite hoje, como salientou, distinguir melhor o essencial do acessório na sequência dos assuntos programáticos, e sentir-se mais à-vontade em aula, quer na apresentação desses assuntos, quer na resolução das dificuldades que os alunos manifestam. Como também sublinhou, a prática de ensino prolongada conduz a um melhor conhecimento dos alunos e a uma maior sensibilidade face às suas dificuldades mais frequentes, e desenvolve a capacidade para as resolver.

As duas professoras manifestaram gosto pelo ensino e pela Matemática, mas nenhuma delas declarou sentir-se profissionalmente realizada, nem se manifestou particularmente entusiasmada a falar das suas motivações e gratificações na profissão. A explicação que deram para este sentimento foi o insucesso que os alunos apresentam em Matemática, tendo Maria da Graça ainda invocado com insistência o desinteresse muito generalizado pela disciplina e as dificuldades que sente para o contrariar, bem como o desprestígio da figura do professor entre os alunos e na sociedade em geral.

Um sentimento de algum desalento e desencanto profissional foi de facto sensível nas declarações das professoras, de uma forma mais nítida em Maria da Graça. A principal motivação e alguma gratificação profissional, como fizeram sentir as duas professoras, provêm dos alunos, da relação que desenvolvem com eles e da contribuição que sentem dar para a sua aprendizagem.

A Matemática e a actividade matemática

Ambas as professoras manifestaram ter tido uma relação positiva com a Matemática durante a escolaridade pré-universitária, pelo menos, como aconteceu no caso de Maria da Graça, a partir de certa altura do período escolar referido. Maria José declarou que sempre gostou desta disciplina, desde o primeiro contacto com ela, através da Aritmética, como disse, referindo-se ao ensino primário, e que esse gosto se manteve relativamente estável durante a sua escolaridade. Em Maria da Graça, o gosto pela Matemática não terá sido tão constante e sobretudo não terá começado tão cedo. As memórias dos primeiros anos na escola, embora genéricas e pouco nítidas, não são muito positivas e recordou que começou a apreciar essa disciplina apenas a partir, sensivelmente, da segunda metade do percurso escolar liceal. Uma e outra professora, acrescente-se ainda, referiram que o gosto pela Matemática não era exclusivo no conjunto das outras disciplinas científicas.

Procurando explicar o gosto que sentiam pela Matemática, as professoras associaram a esse sentimento, a facilidade e o sucesso que conseguiam na disciplina. Na verdade, ambas salientaram os bons resultados que obtinham, as "óptimas notas", como Maria José os classificou, e a gratificação que proporcionavam, o que, no caso da Maria da Graça, recordemos, levou a ver, na Matemática, a sua "coroa de glória". Maria José referiu também que a atraía o facto da Matemática ser considerada uma disciplina difícil e que o sucesso conseguido lhe desenvolveu a autoconfiança na sua aprendizagem.

A entrada no ensino superior foi vivida de forma algo distinta pelas duas professoras, tendo qualquer delas, no entanto, evidenciado ter experimentado diferenças importantes entre a Matemática com que começaram a contactar nesses anos, e a Matemática que conheciam do ensino secundário. Maria José localizou essas diferenças, essencialmente na ênfase atribuída, no ensino superior, à aprendizagem dos conceitos, considerando que o ensino secundário privilegiava o cálculo e era "mais mecanizado". O seu à-vontade na disciplina e a facilidade que sentia no ensino secundário sofreu oscilações mas, como salientou, o seu bom relacionamento com a Matemática não se deteriorou.

No caso Maria da Graça, esta professora terá sentido mais a mudança de nível de ensino. Para além dos aspectos de adaptação à nova situação escolar, em termos de ambiente e ritmo de aulas, mencionou também a novidade dos assuntos e o seu carácter muito teórico e abstracto. Desagradou-a muito a experiência com a Matemática no início do curso e chegou mesmo a pôr a hipótese de mudar de licenciatura. As razões que invocou foram as dificuldades de aprendizagem por que passava, o que lhe terá causado alguma frustração e perda de autoconfiança, coisa que nunca sentira como aluna do ensino secundário. Neste nível de ensino, a Maria da Graça, sentia-se sempre capaz e "entendia tudo", enquanto que, na Faculdade, a Matemática pouco lhe dizia tendo interiorizado um sentimento de alguma incapacidade nesta disciplina. A memória desta experiência pouco gratificante nos primeiros anos do ensino superior foi mesmo invocada para explicar por que razão não lhe agradaria a possibilidade de regressar à Faculdade para frequentar cadeiras de Matemática.

O envolvimento matemático como professoras. Referindo-se ao seu envolvimento actual com a Matemática, as professoras circunscreveram-no à Matemática escolar e consideraram que o trabalho matemático que desenvolvem decorre no essencial da preparação e realização das suas aulas. Maria José incluiu, nesse trabalho, o aprofundamento e a procura de fundamentação relativos a tópicos dos programas, bem como a discussão e reflexão com colegas sobre o desenrolar da prática lectiva, para compreenderem as razões, "o porquê", como dizia a professora, dos problemas e dificuldades de aprendizagem dos alunos. Num caso e noutro, considerou que o trabalho em questão a envolvia em actividades matemáticas, envolvimento que também referiu existir quando realizava programação computacional num curso de Informática, associando este trabalho à lógica e à aplicação da Matemática.

Maria da Graça, pela sua parte, no trabalho como professora, não se sente muito implicada em actividades de carácter matemático, salvaguardando, como vimos, as situações em que lida com conceitos mais avançados, na parte final do ensino secundário.

Discorrendo a propósito da questão de um professor de Matemática poder ser ou não visto como um matemático, as professoras manifestaram posições que, se em alguns aspectos se aproximam, em outros apresentavam cambiantes que as distinguem. Maria José começou por colocar algumas reservas a uma resposta positiva, reconhecendo no entanto essa possibilidade desde que, como sublinhou, o professor não restrinja o seu envolvimento com assuntos matemáticos aos tópicos programáticos que lecciona, e procure manter o contacto com a Matemática de nível superior com o propósito de uma actualização científica. Considerou que frequentemente não é o que sucede entre os professores, fazendo com que, em sua opinião, a actividade matemática não progrida e tenda para a rotina. Veio porém a considerar que um professor também é um matemático, atendendo a que trabalha com Matemática, acautelando, também aqui, que este trabalho não seja rotineiro e mecanizado.

Maria da Graça foi mais categórica, não se reconhecendo, claramente, como uma matemática. "Sou professora", disse a este respeito, "e não me sinto nada [uma] matemática", referindo que, mesmo gostando de trabalhar com esta disciplina, o faz numa perspectiva e com um propósito diferente dos que orientam os matemáticos. Estes, em seu entender, estão muito envolvidos com a ciência com que lidam e desenvolvem o seu trabalho para fazer crescer o conhecimento neste domínio. No seu caso, tal não acontece e não tem essa ciência como "objectivo final" na sua profissão. Evidenciou-se assim que, nesta professora, a Matemática não é vista como um fim em si mesma e que o trabalho que desenvolve com ela decorre da necessidade do seu ensino que é o seu objectivo principal.

A Matemática, uma ciência diferente. Das declarações das professoras, releva, com alguma nitidez, a concepção de que a Matemática é uma ciência com características muito próprias que lhe conferem uma especificidade peculiar, distinguindo-a de outros domínios científicos. Para Maria da Graça, a Matemática é "um mundo completamente diferente" e o que principalmente a distingue é o seu carácter exacto e a sua natureza abstracta.

Na verdade, para esta professora, os conceitos matemáticos são "muito claros", sem "dupla leitura", ou seja, em Matemática, ou "é sim, ou é não", não existem ambiguidades. Estas foram as qualidades que atribuiu à Matemática e que usou na justificação da sua preferência por esta disciplina, dando também a entender que essas qualidades lhe dão confiança quando trabalha com ela.

O carácter abstracto da Matemática é outro dos atributos distintivos que Maria da Graça lhe reconhece face às outras ciências. Este entendimento não traduz, todavia, da sua parte, uma concepção da Matemática como um domínio isolado, sem qualquer tipo de conexão com outros domínios. Na verdade, a professora atribuiu-lhe mesmo uma "base concreta" e considerou que ela se desenvolve porque "é necessária para outras coisas", concebendo-a, portanto, com uma origem exterior ao seu próprio domínio. A par disto, no entanto, exprimiu também a ideia de que o seu desenvolvimento se processa sem que a ligação com essas "outras coisas" se tenha que manter, ou seja, que a Matemática também se desenvolve seguindo uma lógica interna, "sem saber [de] mais nada à volta". Maria da Graça explica assim a natureza abstracta da Matemática que, acrescente-se ainda, associa à sua aplicabilidade muito geral que reconheceu ser também uma das suas principais características.

Para a outra professora, Maria José, o que sobretudo distingue a Matemática das outras ciências é o seu carácter teórico e a possibilidade de se averiguar, com certeza, pela demonstração matemática, a veracidade das suas proposições. Em seu entender, é esta possibilidade que lhe confere a principal distinção face às outras ciências. Expressões como, "a Matemática não é nenhuma ciência experimental", "a Matemática quando é, é" ou, "aquilo [na Matemática], demonstra-se tudo", utilizadas para justificar o seu gosto por esta disciplina e a beleza que lhe reconhece, indiciam, igualmente nesta professora, uma concepção da Matemática como uma ciência exacta, sem ambiguidades, onde é possível a certeza sobre o seu conhecimento. Maria José vê nestas qualidades da Matemática o seu carácter distintivo e, simultaneamente, aquilo que lhe confere uma espécie de superioridade, como se pode depreender da forma como se lhe referiu: ciência "intocável", "indestrutível". Daqui, em seu entender, provém a grande confiança que as teorias matemáticas inspiram e o motivo pelo qual são utilizadas em todos os campos científicos, o que a leva a encará-la como "a base fundamental" para as outras ciências.

Maria José concebe a Matemática como um conhecimento de natureza teórica que os matemáticos elaboram e que outros estudam a sua aplicação em outros campos. Tal não significa, como no caso de Maria da Graça, que considere a Matemática como um domínio isolado que se desenvolve sem contributos do exterior. Como afirmou, não vê a Matemática "desgarrada", das outras ciências, cujas necessidades reconheceu poderem ter sido, em muitas situações, fonte e estímulo para o seu progresso. É ainda de acrescentar, a grande aplicabilidade que também atribuiu à Matemática, vendo nela uma das suas características mais distintivas.

Os conceitos e o cálculo, compreensão e mecanização. As professoras, sempre que se referiam à actividade matemática, faziam-no, em geral, no quadro da Matemática escolar, nomeadamente, a propósito do trabalho que realizam no ensino e daquele que os alunos levam a cabo nas suas aulas. Essas referências e as observações realizadas nas suas aulas permitem discriminar alguns elementos que as professoras utilizam para a caracterização de uma actividade como actividade matemática e outros aspectos das suas concepções sobre a Matemática que se acrescentam aos que foram apresentados e descritos nos pontos anteriores, na composição do mapa das concepções das professoras.

Em ambas as professoras, o trabalho com conceitos parece constituir, por assim dizer, um elemento preponderante para ajuizar do carácter matemático da actividade que desenvolvem, elas próprias e os seus alunos. Maria da Graça não considera que o facto de ser professora a implique muito em actividades de carácter matemático. Todavia, referiu-se à actividade docente nos anos terminais do ensino secundário, como um trabalho em que sente essa implicação e que identifica como matemático, precisamente porque ensinar nesse nível lhe permite lidar com conceitos. Nos anos de escolaridade precedentes, vê-se sobretudo a trabalhar o cálculo, tipo de actividade que não corresponde à ideia que faz do trabalho de um matemático.

Também Maria José utilizou os conceitos para poder atribuir um cunho matemático ao seu trabalho como professora, por exemplo, quando considerou que qualquer professor pode ser visto como um matemático. Completando o seu critério para um juízo a este respeito, incluiu ainda o ter que existir um investimento do professor na compreensão dos conceitos por parte dos alunos, dando a entender que uma abordagem meramente mecânica não tem carácter matemático. Do mesmo modo, para esta professora, também o aluno pode ser visto como um matemático, desde que, como fez questão de sublinhar, compreenda o que lhe é apresentado e não realize mecanicamente o seu trabalho. Num caso e noutro, transparece assim, em Maria José, a valorização dos aspectos conceptuais na Matemática e na actividade matemática. Esta valorização sobressaiu igualmente quando apresentou a sua preferência por certos temas matemáticos, justificando-a pela natureza conceptual desses temas e por fazerem pouco apelo à memorização. Também o facto de ter colocado reservas ao carácter matemático da actividade que os alunos realizaram numas das aulas do 9º ano que foram observadas, considerando que "para eles [alunos] foi mais o mecânico", indica essa mesma valorização.

Referindo-se ao aluno, Maria da Graça considerou que mais do que elaborar os conceitos, ele utiliza-os nas tarefas que realiza e que na maior parte dos casos, eles "são-lhe dados" pelo professor. Porém, é o facto de estarem em jogo conceitos e a sua aplicação que a leva a afirmar que o aluno "faz Matemática". Como explicou, havendo compreensão dos conceitos por parte do aluno, ele sabe aplicá-los, quando não os compreende surgem as dificuldades e a tendência para a mecanização, "decora fórmulas". Foi neste contexto que a professora acrescentou, aos conceitos, o cálculo, as regras e a sua aplicação prática, considerando que tudo isto é Matemática.

Num caso e noutro, no trabalho com conceitos e no cálculo, Maria da Graça introduz a compreensão como elemento para ajuizar do carácter matemático da actividade do estudante. Por exemplo, procurando caracterizar um bom aluno em Matemática, a professora distinguiu entre aquele que consegue bons resultados, recorrendo simplesmente à memorização de processos e técnicas, por vezes, sem compreender o que está a fazer, e aquele que "faz as coisas sabendo o que está a fazer e porquê". A simples mecanização dos processos e técnicas de resolução dos exercícios, como sublinhou, não significa saber Matemática.

Podemos ver com este mesmo sentido, algumas apreciações da professora relativas às aulas observadas. Numa delas, Maria da Graça justificou o carácter matemático da actividade dos alunos pelo facto de eles não terem estado apenas a calcular mas também a raciocinar. Comentando uma outra aula, valorizou a abordagem gráfica das funções, alegando que essa abordagem motiva mais os alunos e permite que eles compreendam melhor os conceitos em jogo. Num outro comentário, considerou que o aluno que ela ajudara no quadro a resolver um exercício estava a fazer Matemática, desde que "estivesse consciente do que estava a fazer", pois estavam em presença conceitos matemáticos e a sua aplicação. Este critério era usado sempre que se tratou de qualificar matematicamente a actividade que os alunos realizavam: estavam a "fazer Matemática" quando lidavam com conceitos e os conseguiam compreender. Por exemplo, apreciou negativamente uma situação de aula, com base na dificuldade de compreensão que sentiu nos alunos e, positivamente, uma outra em que, como disse, os alunos foram capazes de "deduzir conceitos a partir de outros" e que "compreenderam bem" as noções com que estavam a trabalhar.

No que diz respeito ao cálculo, Maria José, em algumas apreciações que fez durante as entrevistas, manifestou pouca atracção por esta actividade, e pareceu relativizar a sua importância na Matemática e na actividade matemática. Isto não a impediu de a enumerar entre as actividades matemáticas que o aluno realiza nas aulas. Calcular, para a professora é fazer Matemática mas Maria José parece atribuir-lhe um papel secundário, vendo-o mais como "um instrumento", do que como "a base" da Matemática.

Maria da Graça manifestou uma outra posição em relação ao cálculo e algumas diferenças no que se refere à visão que tem do seu lugar e papel na Matemática. Na verdade, apreciações suas como, por exemplo, "pensar na Matemática, sem pensar [nos] cálculos... acho que é cortar-lhe uma parte dela", ou, "para se elaborar os conceitos, nós temos que ter os cálculos", dão a entender uma valorização maior do cálculo na Matemática e na actividade matemática, por parte desta professora.

A forma como Maria da Graça se posiciona face ao cálculo — chegou a dizer-se sua "defensora" — parece estar associada à sua ideia do cálculo como algo necessário e eventualmente prévio, à aprendizagem e trabalho com os conceitos matemáticos. No entanto, deu a entender que não é uma actividade que lhe dá muito prazer ou em relação à qual sinta uma atracção especial. "Fazer cálculos de empreitada", comentava a professora, a propósito dos aspectos estéticos na Matemática, "não é assim uma coisa que tenha grande beleza". Neste contexto manifestou uma preferência pelos aspectos mais conceptuais desta ciência.

Referindo-se aos alunos, a ideia que Maria da Graça transmitiu foi diferente, considerando que estes chegam a manifestar preferência por tarefas de cálculo, face a outras de natureza problemática ou que envolvam Geometria, neste caso, precisamente porque não envolve cálculo. É também esta a visão que Maria José tem dos alunos a este respeito. Como explicou, de uma primeira manifestação de rejeição, face a tarefas de aplicação de determinadas regras ou técnicas de cálculo, os alunos, tendo adquirido essas técnicas, passam a aceitar e até a gostar de as realizar, mesmo em quantidade. Para esta professora, e também para Maria da Graça, números e cálculo estão entre os elementos principais que os alunos associam à Matemática, tendo a primeira acrescentado ainda a natureza abstracta desta disciplina.

As duas professoras atribuíram aos programas anteriores aos que estão em vigor, responsabilidades no desenvolvimento da visão da Matemática que reconhecem nos alunos, uma vez que, do seu ponto de vista, dão muita importância aos números e ao cálculo. Maria José, para além disso, considerou que, a avaliação também privilegia o domínio técnico do cálculo, e que a facilidade e rapidez em calcular têm predominado como critério para julgar um aluno, como bom aluno a Matemática. Para procurar mudar a visão que os alunos têm desta disciplina, Maria da Graça aludiu à importância de começar mais cedo no ensino, o trabalho sobre outros aspectos da Matemática — a Geometria, os problemas, o raciocínio — confessando-se, embora, ela própria, ainda com pouco à-vontade para esse trabalho. Maria José reconheceu também que os professores têm dificuldade em apresentar a Matemática de forma a contrariar a imagem dominante nos alunos e que, nos programas, há tópicos que não vê outro modo de serem trabalhados, senão como "domínio de técnicas".

Reflectindo sobre o conjunto das aulas que foram observadas, Maria José considerou que, na turma do 9º ano, o trabalho realizado se circunscreveu a actividades de cálculo, tendo no entanto dado a entender que pretendia que, nesse trabalho, os alunos compreendessem os processos e técnicas envolvidos. Na verdade, a observação realizada evidenciou esta preocupação da parte da professora em diversos momentos, com utilização de apoios visuais, como esquemas e diagramas, de tarefas que visavam fazer sentir, nos alunos, a necessidade da regra ou técnica de cálculo a aprender, e de analogias e relações com a linguagem corrente ou assuntos previamente estudados. Nos comentários as estas aulas, a professora manifestou a ideia que os alunos tendem para a memorização, frequentemente estimulada pelo uso de recursos mnemónicos muito divulgados entre os professores e os alunos — do tipo "corta-corta" ou "tapa-destapa" — em processos de simplificação de expressões matemáticas. Relativamente à utilização de diagramas, como a professora referiu e foi visível em algumas aulas, certos alunos têm dificuldade em compreendê-los e tendem a preferir a simples memorização do assunto (noção, regra, técnica) cuja compreensão ou justificação o diagrama pretendia apoiar.

Raciocinar, demonstrar, aplicar. O raciocínio em Matemática e, em particular, a demonstração, bem como a aplicação da Matemática, são outros dos aspectos que justificam uma menção para caracterizar e procurar compreender as concepções das professoras sobre a Matemática e a actividade matemática. Como com os conceitos e o cálculo, também neste caso se evidenciaram entendimentos e posições semelhantes ou convergentes nas professoras, bem como algumas diferenças ou contrastes significativos.

Maria José utilizou com frequência os termos raciocínio e raciocinar em referências à Matemática e à actividade matemática quer com um sentido muito abrangente, aparecendo com o significado muito amplo de 'pensamento' ou 'pensar' em geral, quer com um sentido mais específico, em que este pensar se exerce sobre, ou utiliza, conceitos, relações ou procedimentos matemáticos. Em qualquer dos casos, 'raciocínio' e 'raciocinar', funcionam para Maria José como uma espécie de palavras-chave para ajuizar do carácter matemático de uma actividade que os alunos realizam em aula. Para esta professora, recorde-se, quando um aluno compreende um raciocínio, ainda que elaborado e apresentado pelo professor e, mais ainda, quando consegue raciocinar por si próprio, tirando as conclusões pretendidas na tarefa que tem em mãos, "está a realizar uma actividade matemática". E, para além disto, a facilidade e rapidez de raciocínio, são aspectos com que Maria José caracterizou um bom aluno a Matemática ou com jeito para esta disciplina, bem como a capacidade que ele tem de se interrogar e questionar perante o que lhe é proposto em aula. Em relação às aulas observadas, nos comentários que fez a alguns episódios com alunos, a professora destacou por diversas vezes o "raciocínio" do aluno no episódio em questão, valorizando-o do ponto de vista da actividade matemática, como por exemplo se percebe nesta sua afirmação: "[a aluna] está a formular um raciocínio e para mim isso é fazer Matemática".

Também 'demonstrar' e 'demonstração' têm uma visibilidade significativa nas apreciações e comentários de Maria José sobre a Matemática e a actividade matemática, não aparecendo, no entanto, entre as suas reflexões quando comentou as aulas observadas. Esta professora, como vimos, dá à demonstração e ao raciocínio dedutivo um lugar de relevo na Matemática, considerando que marcam nela a diferença em relação às outras ciências e que conferem ao conhecimento matemático consistência e solidez, razão de toda confiança que este conhecimento inspira. Maria José, para além disso, referindo-se às demonstrações que realiza quando ensina, incluiu-as entre as actividade matemáticas de que tira mais gratificação, contrastando este seu gosto com o dos alunos. Reconheceu que é uma actividade rara nas suas aulas, justificando esta situação pela dificuldade que os alunos têm em compreender a necessidade de uma demonstração e pela relutância que têm em a realizar.

Em Maria da Graça, estes aspectos, quer os relacionados com a demonstração, quer os relacionados com o raciocínio, não assumiram um destaque tão significativo. Esta professora considerou que os programas anteriores aos que vigoram actualmente, muito em especial os dos anos mais iniciais, preocupavam-se sobretudo com o cálculo, deixando pouco espaço para que os alunos pudessem ser envolvidos em tarefas mais elaboradas e matematicamente mais exigentes. Tarefas que permitissem, como dizia a professora, "raciocínios mais evoluídos", de carácter "mais matemático", por parte dos alunos. Em sua opinião, recordo, será esta uma das razões que explica a imagem que os alunos têm da Matemática, associando-a fortemente a números e cálculo. Para modificar esta situação, defendeu que é necessário que o trabalho com aspectos não meramente de cálculo, comece mais cedo na escolaridade.

Para Maria da Graça, demonstrar, mesmo quando se trata da reconstrução de uma demonstração já efectuada, como é o caso das que, em geral, o professor e os alunos realizam, é uma actividade matemática, mas fez questão de sublinhar que esta actividade não esgota a Matemática. Nos comentários às aulas observadas, esta professora só muito pontualmente utiliza os termos 'demonstração' ou 'raciocínio' na apreciação das actividades realizadas pelos alunos, no que se refere ao seu carácter matemático. Num desses comentários, recorde-se, referiu que os alunos não tinham estado a realizar uma demonstração, pois o estudo limitou-se a casos particulares e à observação desses casos. Faltava, como disse a professora, o estudo analítico geral. Num outro comentário, considerou que os alunos estiveram envolvidos em actividades matemáticas, pois realizaram exercícios de cálculo e também "praticaram o raciocínio". Neste caso, manifestou ainda a convicção de que os alunos em questão poderiam evoluir mais do ponto de vista matemático, se lhes fosse dado mais tempo no trabalho que realizam em aula, mas, em seu entender, se tal acontecesse não seria possível cumprir o programa.

Para as duas professoras, aplicar Matemática é uma actividade matemática quer se trate, como esclareceu Maria José, de aplicações internas à própria Matemática, quer da sua aplicação em outros domínios científicos ou da realidade. Na verdade, como já foi mencionado, a ideia da Matemática como uma ciência de grande aplicabilidade pode ser destacada como um elemento importante nas concepções das duas professoras sobre esta ciência. Ambas reconheceram, no entanto, que a ideia da Matemática como uma disciplina com aplicações em outros campos disciplinares e com relações com a realidade, não se desenvolve nos alunos ao longo da sua escolaridade. Do seu ponto de vista, esta situação deve-se ao facto de a Matemática, de um modo geral, ser ensinada sem ter em conta essas suas aplicações e relações, tendo as professoras reconhecido que elas próprias, em muitos dos assuntos dos programas, têm dificuldades em pôr em prática uma abordagem didáctica que as incorpore.

Nas aulas observadas, foi manifesta a preocupação das professoras em relacionar os tópicos matemáticos em estudo, com assuntos trabalhados em aulas anteriores, ou mesmo em outros anos, bem como em evidenciar e utilizar analogias entre esses assuntos. Todavia, isto era feito sempre sem referências a domínios ou situações não matemáticas que apenas tiveram alguma expressão no momento da introdução da função quadrática em que a professora recorreu a exemplos da vida real como ilustração da curva dessa função.

Autonomia e iniciativa. Um outro aspecto que também se revelou de modo distinto nas professoras, é a forma como encaram a autonomia e iniciativa dos alunos nas actividades que desenvolvem, enquanto ingredientes na definição e realização dessas actividades, ou critérios para ajuizar o seu carácter matemático.

Maria José, referindo-se à preparação das aulas, explicou que a sua preocupação principal é procurar exemplos para a introdução dos assuntos matemáticos de modo que os alunos possam, a partir desses exemplos, chegar, por eles próprios, às aprendizagens pretendidas. Ou seja, exemplos que tenham, fundamentalmente, uma função heurística. O que pretende é conseguir uma sequência de aprendizagem em que "a conclusão saia deles [dos alunos]" e não seja meramente apresentada pelo professor. Coerente com esta intenção, Maria José destaca, entre aquilo que mais gosta que aconteça nas suas aulas, o sentir "eco" nos alunos, ou seja, as situações em que os alunos reagem ao que ela vai apresentando, em que eles colocam questões ou tomam outro tipo de iniciativas. Como também disse, quando se dirige à turma, espera que os alunos façam perguntas e se isso não acontece, fica "muito desconsolada".

Na verdade, em Maria José, se por diversas vezes e a propósito de várias situações nas entrevistas e nas aulas, se evidenciou o reconhecimento da importância do envolvimento e participação dos alunos nas tarefas, foi também patente a valorização do seu espírito de iniciativa e da capacidade de trabalhar autonomamente. Esta professora, como vimos, para caracterizar um aluno com jeito para Matemática, referiu-se à aptidão que alguns têm de interpretar sozinhos as situações em que trabalham, de se interrogarem e de tomarem a iniciativa de colocar questões. Para Maria José, um bom aluno a Matemática deve revelar estas qualidades, tem que ser capaz de "trabalhar sozinho".

No que se refere às aulas observadas, Maria José, declarou preferir aquelas em que os alunos estão envolvidos em tarefas que realizam sem intervenção significativa do professor. Em relação à turma do 9° ano, por exemplo, apreciou negativamente uma das tarefas que propôs aos alunos, pelo facto de eles não terem conseguido realizá-la sem o auxílio do professor. E, relativamente à turma do 10° ano, para justificar o facto de ter considerado que os alunos estiveram a "fazer Matemática", destacou momentos de aula em que eles realizavam autonomamente o trabalho, estabelecendo "sozinhos" as relações matemáticas pretendidas, elaborando "o seu próprio" modelo matemático. Lembro que nesta turma os alunos trabalhavam agrupados e as aulas eram estruturadas para que os grupos dispusessem de um tempo limitado para realizarem o conjunto das tarefas previstas para a aula, sem intervenção significativa da professora.

Para além disto, esta professora, na análise das suas aulas, valorizou também os momentos em que os alunos não se limitavam a dar resposta a solicitações suas e tomavam a iniciativa de questionar ou colocar dúvidas sobre o que estava a ser apresentado ou sobre a tarefa que tinham em mãos. Perante as intervenções dos alunos, Maria José evita dar uma sanção imediata procurando que os alunos apresentem explicações ou justificações das afirmações que fazem ou dos resultados a que chegam.

A par disto, contudo, esta professora reconheceu nela a tendência para apoiar em demasia os alunos, servir-lhes de "bengala", foi a expressão que utilizou, perante bloqueios, dificuldades ou hesitações que eles manifestam na realização das tarefas. Em sua opinião, esta tendência pode induzir nos alunos alguma dependência do professor, embora lhe permita aperceber-se dos problemas que eles sentem na aprendizagem da Matemática. Recordo que Maria José, referindo-se ao distanciamento da sua professora no ensino secundário em relação aos alunos, retirou daqui um aspecto positivo, o facto de essa professora obrigar os alunos a trabalhar autonomamente, aspecto a que Maria José considerou muitas vezes não dar a devida atenção, orientando e "encaminhando" em demasia os alunos na realização dos trabalhos.

Maria da Graça, pelo seu lado, comentando a ideia, muitas vezes invocada, de que os alunos chegam ao ensino superior com um preparação matemática deficiente, considerou que isso se deve, em parte, ao facto de, no ensino secundário, os alunos terem pouca autonomia e trabalharem de uma forma muito dependente do professor. Reconheceu que este tem responsabilidade na situação pois, como explicou, faz-lhes "a papinha toda", com o objectivo de diminuir o insucesso na disciplina, e deu a entender que aplicava a ela própria o reparo que fazia. A este propósito, lembro o episódio de uma aula em que um aluno conseguiu determinar alguns pontos para esboçar o gráfico de uma parábola, a partir da sua expressão analítica, ficando depois 'bloqueado'. Sem saber como utilizar os valores que determinara, ficou a aguardar o auxílio da professora e só progrediu na tarefa com as ajudas que foi recebendo. Recordo também que, em geral, nas aulas desta professora não havia uma delimitação temporal para a realização independente das tarefas pelos alunos. Esta acontecia apenas depois da explicação ou exemplificação inicial por parte da professora, ou da realização da tarefa no quadro, feita por um colega. Nesta explicação inicial, os exemplos utilizados tinham, fundamentalmente, uma função ilustrativa, isto é, ao resolvê-los, a professora apresentava aos alunos o processo de resolução ou o modo de proceder na tarefa ou em tarefas similares.

No entanto, no que Maria da Graça disse, e na forma como conduzia as suas aulas, percebeu-se também o reconhecimento da importância do envolvimento e da participação dos seus alunos nos trabalhos. Nas explicações que dava nas aulas, procurava captar a atenção dos alunos e, com as solicitações que fazia, em regra dirigidas à turma como um todo, procurava que eles interviessem, conduzindo a aula, como já foi mencionado, com base nas perguntas que colocava e nas respostas que ia obtendo. Os alunos, de uma forma geral, pareciam acompanhar o diálogo da professora com a turma, por ela orientado e com questões de sua iniciativa, e alguns deles iam respondendo às suas solicitações.

A Matemática nas aulas

As turmas em que foram observadas aulas eram, no caso de Maria da Graça, duas turmas do 10º ano, uma que a professora considerava razoável e com alguns bons alunos e outra que considerava "fraquinha", com alunos desinteressados e sem vontade de trabalhar. Em relação a esta turma a professora tinha expectativas baixas e não antevia que os alunos progredissem muito nos seus estudos.

No caso de Maria José, foram observadas aulas numa turma do 9º ano e numa turma do 10º ano. A primeira era heterogénea no aproveitamento matemático e constituída por alunos com os quais, na sua maioria, a professora já trabalhava desde há dois anos. A outra, era uma turma de Métodos Quantitativos, com alunos que a professora considerava interessados, embora com resultados não muito bons. Como Maria José fez notar, estes alunos, no princípio do ano, não olhavam com bons olhos a disciplina, vendo-a como a Matemática com que tinham tido má relação em anos anteriores e em que não pretendiam investir. No entanto, na apreciação que a professora fez do trabalho desenvolvido com a turma, deu conta de uma evolução positiva nos alunos ao longo do ano que atribuiu às opções que tomou, visando despertar o seu interesse e participação, nomeadamente, apoiando o trabalho em fichas com tarefas para os alunos resolverem organizados em grupo e que incluíam "problemas tipo charada". Maria José reconheceu ter conseguido, com esta forma de proceder, progressos significativos na adesão e envolvimento dos alunos e alguma melhoria no seu aproveitamento na disciplina.

Ambiente de aula e interacções. Nas diferentes turmas, as aulas decorreram sempre com ambiente de trabalho, sem interrupções ou perturbações importantes e com os alunos aparentemente à-vontade e de um modo geral envolvidos nos trabalhos. Com uma e outra professora, as aulas desenrolavam-se sucedendo-se, alternadamente, momentos de intervenção das professoras, relativamente prolongados, com intervenções pontuais dos alunos em resposta a solicitações suas, e momentos em que os alunos resolviam, no lugar ou no quadro, as tarefas propostas, estes, em geral, de mais curta duração.

A interacção preponderante nas aulas era entre as professoras e os alunos, e a comunicação privilegiada assumia a forma de um diálogo, quer numa relação individualizada professora-aluno, quer numa relação professora-turma. Num e noutro caso, em regra, a iniciativa partia das professoras e a comunicação desencadeava-se com base nas intervenções que realizavam ou nas questões que iam colocando e às quais os alunos iam respondendo. Este tipo de interacção em aula foi, na verdade, o mais frequente, mesmo quando era introduzido um assunto matemático novo.

No caso de Maria José, no entanto, na turma do 10º ano, houve aulas com uma estrutura diferente, consistindo, basicamente em dois momentos distintos. Um, de trabalho independente dos alunos, organizados em grupos, a realizar tarefas propostas numa ficha, e outro, de correcção dessas tarefas efectuada por um aluno no quadro e supervisionada pela professora. Nestas aulas, a comunicação e a interacção entre alunos eram mais significativas e ocupavam um espaço na aula mais importante. Situações deste tipo também ocorreram em algumas aulas de Maria da Graça quando pedia aos alunos a resolução de um exercício e estipulava um tempo para isso. Neste caso, no entanto, a interacção era entre pares de alunos e de mais curta duração, e ocorria quase sempre de forma espontânea.

A abordagem didáctica: as tarefas, o papel do professor e do aluno. No que se refere aos tópicos matemáticos sobre que incidiram as aulas observadas, nas turmas de Maria José foram trabalhados os radicais e operações com radicais (9º ano) e condições e operações com condições (10º ano). No caso de Maria da Graça, uma das turmas iniciou a Geometria analítica (representação de pontos, rectas e planos) e a outra, o estudo da função quadrática.

No tratamento de um assunto matemático novo, as professoras seguiam um processo formalmente semelhante em termos de sequência de aula que, de uma forma simples, pode ser descrito do seguinte modo: revisão de assuntos anteriormente trabalhados ou continuação do estudo iniciado na aula anterior, introdução do novo assunto, exercícios de aplicação. Estes três momentos, apesar de terem funções diferentes no processo de ensino, sucediam-se sem que se notasse, de um para outro, distinção significativa no que respeita à natureza das tarefas, ou das solicitações aos alunos, e ao tipo de interacção em aula.

Para a introdução do novo assunto matemático, as professoras começavam com exemplos que, pela sequência com que eram apresentados e pelo papel que as professoras assumiam na resolução das tarefas inerentes, eram propostos com funções diferentes. Maria da Graça, como sucedeu, por exemplo, no estudo da representação de regiões do plano ou em várias situações do estudo da função quadrática, realizava ela própria, no todo ou em parte, a tarefa proposta, ilustrando como os alunos deveriam proceder em situações semelhantes. Neste caso, como já foi mencionado, a função dos exemplos é essencialmente ilustrativa: a professora mostra a forma de proceder adequada, procurando esclarecer os diferentes passos e o que em cada passo se pretende; os alunos recapitulam o procedimento acabado de ilustrar, prosseguindo a resolução iniciada pela professora, ou na realização de um outro exemplo semelhante ou com algumas variantes.

No caso de Maria José, como aconteceu, por exemplo, no ensino das regras das operações com radicais, a professora propunha alguns exemplos do mesmo tipo, com a intenção de que os alunos dessem conta do que existia de comum entre eles e que, com essa exploração, pudessem eles próprios descobrir e formular a regra pretendida. Esta abordagem, partindo do particular para o geral, pode ser caracterizada, como já foi referido, como uma abordagem do 'tipo indutivo', e os exemplos, embora naturalmente muitas vezes também ilustrem a aplicação de regras e técnicas, ou propriedades e relações matemáticas, têm aqui uma função essencialmente heurística: com um conjunto de exemplos, a professora pretende envolver os alunos num processo de descoberta, esperando que o confronto com os exemplos propostos, e eventuais ajudas ou orientações suas na resolução, faça emergir nos alunos a regra, técnica ou propriedade que quer ensinar.

Os exemplos com que as professoras iniciavam um estudo novo, consistiam em tarefas cujo grau de complexidade, ia aumentando de tarefa para tarefa. Este percurso do 'simples para o complexo' proposto aos alunos, visível em ambas as professoras, é uma outra característica genérica da abordagem didáctica por elas utilizada, bem como a progressão 'do concreto para o abstracto', neste caso mais evidente nas aulas de Maria José.

As tarefas propostas aos alunos eram predominantemente de cálculo ou de exercício técnico (por exemplo, de utilização de terminologia, de aplicação de regras e procedimentos, de conhecimentos de 'factos' matemáticos). Nas turmas de Maria José, envolveram principalmente o cálculo com números (radicais e operações com radicais) ou com condições e conjuntos, e nas aulas de Maria da Graça, a representação de pontos, rectas e regiões do plano num referencial de tipo cartesiano, ou o estudo e representação gráfica de funções quadráticas. Na sua generalidade, eram tarefas de resolução rápida e apresentadas em contexto estritamente matemático. Ambas as professoras recorreram a apoios intuitivos, como, por exemplo, os diagramas que Maria José utilizou para favorecer a compreensão dos alunos de situações envolvendo a combinação de várias condições, ou as ilustrações de situações reais para a introdução das características da parábola, apresentadas por Maria da Graça. Esta professora também recorreu a material manipulável — modelos de parábolas em cartolina — visando igualmente melhorar a compreensão dos alunos do assunto em estudo. A resolução das tarefas, efectuada pelas professoras ou pelos alunos — frequentemente com apoio das professoras — era 'pública' ou, uma vez terminada, tornada 'pública', isto é, apresentada no quadro a toda a turma.

VII — A concluir

Síntese do estudo

Esta investigação é um estudo que se insere na área de pesquisa sobre o conhecimento do professor incidindo nas suas concepções relativas à Matemática e à actividade matemática, com maior ênfase e desenvolvimento neste último aspecto. Tais concepções, entendidas como significados que o professor foi elaborando e que adquiriram algum grau de estabilidade[1], constituem o património conceptual e o instrumento interpretativo com os quais ele dá sentido às situações com que lida na sua prática lectiva e orientam a sua actuação. Se o professor age com base nas interpretações e nos significados que elabora, a sua actuação tem assim uma causalidade simbólica[2], desempenhando as suas concepções um papel fundamental na maneira como orienta a sua acção no ensino, ou seja, na definição das opções didácticas e pedagógicas e nas decisões que

[1] John Dewey (1991).

[2] Segundo Erickson (1986), a actuação dos sujeitos nas relações interpessoais não é redutível a um conjunto de actos comportamentais apenas marcados pela exterioridade, mas incorporam os significados simbólicos que as pessoas detêm e elaboram e nessa medida são elementos de causalidade na sua actuação. Para Brunner, na perspectiva da psicologia cultural, a "acção" é a parte do comportamento "intencionalmente fundamentada" (p. 29) ou, como também diz, implica a condução do agir sob a influência dos estados intencionais" (p. 21).

toma nessa prática. Nesta convicção, a investigação foi conduzida com o objectivo de identificar e descrever, nos seus traços mais relevantes, as concepções dos participantes sobre a Matemática e a actividade matemática, confrontando-as de forma a evidenciar quer elementos de homogeneidade, quer elementos de heterogeneidade, com base as seguintes questões: como descrevem os participantes a sua visão da Matemática e a relação que têm com esta ciência; como caracterizam a actividade matemática; e, em que aspectos se distinguem e em que aspectos se assemelham as suas concepções sobre a Matemática e actividade Matemática. Orientaram ainda o estudo duas outras questões sobre os percursos de vida escolar e profissional dos participantes: que elementos se destacam nesses percursos; e, em que aspectos se distinguem e em que aspectos se assemelham, particularmente no que se refere à relação de cada um com a Matemática e com a profissão.

A escolha das concepções para objecto deste estudo, e o propósito de as investigar considerando os pontos de vista e significados dos sujeitos estudados, conduziu a uma opção metodológica qualitativa ou interpretativa (Eriksson, 1986). Uma vez que o objecto da investigação era circunscrito e pretendia uma análise em profundidade, sensível às particularidades dos participantes, recorri a estudos de caso como modalidade de pesquisa (Merrian, 1988; Yin, 1984), concretizados, no essencial, com a realização de entrevistas e, no caso das professoras, também com a observação de aulas.

A investigação envolveu a participação de dois matemáticos, professores do ensino superior, e duas professoras de Matemática do ensino básico e secundário, todos eles, portanto, docentes de Matemática, embora exercendo em níveis de ensino muito distintos, nomeadamente, nos seus propósitos e finalidades, na sua organização e funcionamento institucional, nas solicitações a que sujeitam os diferentes intervenientes e nos percursos profissionais que lhes proporcionam. Esta diferenciação nos participantes tornava possível o confronto entre as concepções de sujeitos com experiências profissionais muito distintas, em especial no que essas experiências envolvem relativamente à Matemática e à actividade matemática, procurando com isso uma melhor compreensão dessas concepções. O estudo dos matemáticos constitui, para além disso, um contributo para a investigação das suas concepções, sobre as quais não existem estudos em

Portugal, apesar da influência que certamente exercem nos futuros professores de Matemática que deles recebem formação superior nessa ciência.

O quadro apresentado das concepções relativas a cada uma das duas vertentes do estudo — a Matemática e a actividade matemática — procura evidenciar o singular e o comum, o convergente e o divergente, o semelhante e o contrastante entre os diferentes participantes, pretendendo igualmente, como referi, tirar proveito do facto de estes participantes se incluírem em dois grupos muito diferentes. No caso das professoras do ensino básico e secundário, o estudo realizado teve em consideração a sua prática em aula, integrando elementos emergentes dessa prática na caracterização das suas concepções. O estudo incidiu igualmente sobre alguns aspectos dos percursos de vida escolar e profissional dos diferentes professores, com a intenção de proporcionar elementos de contextualização e de compreensão das suas concepções à luz desses percursos. Alguns estudos na área do conhecimento do professor — por exemplo, o estudo clássico de Alba Thompson (1982) sobre as concepções dos professores de Matemática — chamam a atenção para a influência da experiência prévia dos professores enquanto alunos, isto é, do seu passado escolar, no caso, em Matemática, no desenvolvimento e firmação das suas concepções sobre esta disciplina e sobre o seu ensino.

Conclusões

Na profissão que exercem, os participantes neste estudo lidam com a Matemática. Sendo professores, todos ensinam esta disciplina e, no caso dos matemáticos, realizam também investigação neste domínio científico. Da análise e confronto dos seus percursos escolares até ao exercício profissional, resultaram um conjunto de conclusões que a seguir apresento organizado em três pontos. Um sobre a relação com a Matemática e a escolha profissional, outro relativo à relação com a profissão e o terceiro inteiramente dedicado à apresentação das principais concepções relativas à Matemática e à actividade matemática.

A relação com a Matemática e a escolha profissional

A relação dos participantes deste estudo com a Matemática, desenvolvida ao longo do percurso escolar de cada um, pode ser caracterizada pelos aspectos a seguir apresentados e que a investigação realizada permitiu identificar de uma forma mais nítida.

Em primeiro lugar, essa relação não parece ter sido marcada por uma preferência exclusiva pela Matemática face às outras disciplinas liceais da área das ciências. Em segundo lugar, o gosto manifestado pela Matemática ter-se-á, em geral, revelado cedo na escolaridade, e mantido estável durante o período escolar pré-universitário. A este gosto é claramente associado, de uma forma muito notória no caso das professoras, um sentimento de facilidade na aprendizagem da disciplina e de gratificação pelo sucesso aí conseguido, sentimento que, por sua vez, as professoras reconhecem como indutor de autoconfiança nas suas capacidades matemáticas. Em terceiro lugar, o percurso no ensino superior tem consequências distintas na relação dos participantes com a Matemática, por vezes mesmo de sinal contrário.

Relativamente a este último aspecto, numa das professoras a experiência e relação com a Matemática na Faculdade contrastou fortemente com a vivência da disciplina que trazia do ensino secundário. Esta professora, na componente científica do seu curso, passou por uma experiência globalmente pouco gratificante que lhe terá induzido algumas atitudes negativas relativamente à Matemática apresentada que via muito teórica, abstracta e descontextualizada, e, por isso, sem lhe conseguir atribuir significado ou aplicação. Esta experiência da professora e as dificuldades com que se debateu geraram frustração, insegurança e fortes sentimentos de rejeição em relação à Matemática que lhe era proposta. No caso da outra professora, a sua relação positiva e de sucesso com a Matemática que experimentou nos anos da Liceu também sofreu perturbações durante o ensino superior, todavia, as perturbações não geraram sentimentos negativos ou de rejeição e o seu bom relacionamento com a disciplina manteve-se. Relativamente aos matemáticos, também eles sentiram algumas diferenças na passagem para o ensino superior no que diz respeito à Matemática aí trabalhada e à sua vivência da disciplina, diferenças a que não atribuíram importância e que não afectaram a boa relação com a Matemática que traziam do ensino secundário. Pelo contrário, o prosseguimento dos estudos veio mesmo a intensificar e a aprofundar essa relação, o que terá contribuído significativamente para a sua opção definitiva por uma carreira profissional na Matemática.

Muito embora o gosto pela Matemática e o sucesso na disciplina conseguidos durante o ensino pré-universitário possam estar presentes na definição das opções académicas e profissionais e terem nela um contributo importante, na determinação dessas opções intervêm ainda outros factores de diferente natureza. Na verdade, o estudo realizado dá indicações de que a escolha da Matemática como domínio científico para o exercício da profissão não foi determinada, em exclusivo, por uma inclinação preferencial dos participantes em relação a essa disciplina, como, do mesmo modo, também a escolha profissional não foi exclusivamente induzida e fixada por uma preferência clara pela profissão em que se vieram a estabelecer.

No caso das professoras, a opção pelo curso de Matemática está estreitamente ligada com a opção pelo ensino como profissão: escolheram a Matemática para virem a ser professoras. No entanto, numa delas, a escolha profissional efectuada foi uma entre várias possibilidades aparentemente em pé de igualdade, e na outra, essa escolha não correspondeu a intenções e preferências profissionais mais precoces. No caso da professora em que isto sucedeu, o ensino não estava sequer nos seus horizontes profissionais e era inclusivamente considerado uma profissão pouco atractiva e com aspectos negativos diversos. No que diz respeito às preferências disciplinares, em ambas as professoras, a Matemática não se distinguia significativamente de outras disciplinas científicas. O mesmo aconteceu no caso dos matemáticos, cujas opções académicas iniciais não estavam orientadas para um trabalho profissional em Matemática, decisão tomada relativamente tarde, no ensino superior, e que, então sim, terá sido muito influenciada pelo gosto pela Matemática que entretanto tinha se tinha aprofundado.

Na definição das opções académicas e profissionais dos participantes neste estudo, terão tido intervenção outros factores, extrínsecos à Matemática e à profissão de professor, de carácter social, concepções relativas à profissão de professor e mesmo aspectos idiossincráticos e de circunstância. Aparentemente, estes factores podem até, em certas situações, ter desempenhado um papel mais determinante nas referidas opções do que a preferência pela disciplina e a relação positiva e os bons resultados nela conseguidos previamente. Um dos matemáticos, por exemplo, pretendia tirar a licenciatura em Física, mas adiou a concretização da sua preferência e escolheu a Matemática, seguindo o conselho de um dos seus professores. Acabou por tornar definitiva esta opção, a isso conduzido pela intensificação do seu interesse e gosto precoce por essa ciência, estimulado pelo seu ambiente familiar muito favorável à Matemática. No caso de uma das professoras, a influência familiar foi também manifesta, em particular através da acção do pai que via o ensino como uma profissão especialmente adequada a uma mulher e que terá, assim, pesado na sua opção. Nesta professora, para a escolha pela Matemática terão ainda convergido alguns factores relacionados com a sua personalidade. O seu sentimento de insegurança perante situações novas, por exemplo, influenciou a decisão que tomou, uma vez que, escolhendo a Matemática seria acompanhada por um conjunto de colegas conhecidas que optaram pelo mesmo curso. Para além disto, aspectos como certas concepções correntes relativas à profissão de professor — profissão vista como independente e proporcionando disponibilidade de tempo, nomeadamente, para as ocupações familiares — surgem também como factores com alguma importância em favor da escolha dessa profissão.

No curso por que optaram, ambas as professoras tiveram uma formação educacional específica para o ensino da Matemática. Globalmente, a sua visão dessa formação não é muito positiva, devido ao desajustamento entre as expectativas que tinham, centradas na obtenção de orientações específicas concretas, directamente relacionadas com a prática lectiva do professor, e a formação recebida. Consideraram esta formação desligada da realidade da prática profissional e excessivamente teórica, com carências ao nível da orientação e apoio didáctico específicos, limitações que podem estar relacionadas com presença reduzida destas componentes na formação educacional, na época em que realizaram o curso. Relativamente ao estágio pedagógico, as duas professoras tiveram experiências que qualificaram de forma bastante díspar, num caso, predominantemente positiva e no outro, predominantemente negativa. Nos dois casos, a figura e o papel do orientador da parte da escola, bem como o trabalho de colaboração entre os professores estagiários, surgem como elementos que podem marcar a imagem global da experiência de estágio e a qualidade da formação aí proporcionada.

Os matemáticos, embora tenham mostrado preocupações de natureza pedagógica e valorizado qualidades desta índole no professor do ensino superior, reconhecem-se, recordo, sobretudo como investigadores. Não tiveram qualquer formação de natureza pedagógica ou didáctica, e não existe uma componente dessa natureza na formação inicial dos docentes na universidade a que pertencem, situação muito generalizada no ensino superior. Annie Bireaud (1995), citando um relatório da OCDE, diz-nos que em nenhum país desta organização os professores deste nível de ensino, "são obrigados a adquirir uma qualificação pedagógica especial antes de serem contratados, nem sequer para serem mantidos no seu posto de trabalho" (p. 186) e são raros os países em que tal acontece[1]. No nosso país, um assistente estagiário para ser contratado como assistente tem que realizar as chamadas "provas de aptidão pedagógica e de competência científica", o que faz supor uma exigência de capacidades pedagógicas, no entanto, mestrados e doutoramentos que dão acesso à carreira de docente não contemplam formação a este nível.

Não existe, em Portugal, muita informação disponível sobre o modo como os alunos e professores vêem os cursos e o ensino superiores, embora tenham sido já realizadas avaliações de licenciaturas em diversas universidades. Num inquérito a professores de várias instituições de ensino superior realizado em França, mais de metade dos respondentes (cerca de 60%) disseram sentir dificuldades em transmitir conhecimentos, transmissão entendida como "o conjunto dos processos e das práticas executados (...) com o objectivo de fazer com que os alunos adquiram conhecimentos (...) capacidades e competências numa determinada área científica" (Bireaud, 1995, p. 53)[2]. Estas dificuldades

[1] Bireaud menciona os exemplos do Zaire (onde existe a obrigação de um mínimo 90 horas de formação inicial em pedagogia universitária — psicologia de adultos, técnicas de comunicação, docimologia, sistema de ensino universitário — e da Costa de Marfim (com oficinas de duas sessões de dez dias sobre pedagogia, reflexão sobre a prática, técnicas e métodos de ensino). Em outros países, ainda segundo a mesma autora, a componente pedagógica-didáctica não tem carácter obrigatório ou dirige-se apenas a certo tipo de docentes (Austrália) ou de estabelecimentos de ensino (*Polytechnics*, na Grã-Bretanha).

[2] Os resultados deste inquérito datam já de há duas décadas mas, de acordo com Bireaud (1995), dada "seriedade metodológica" do estudo e a diversidade dos professores que envolveu, esses resultados são de "grande interesse" (p. 53).

foram tendencialmente explicadas por razões exteriores ao professor e à instituição[1], como também aconteceu num outro estudo, igualmente francês, no mesmo nível de ensino, em que foram poucos os professores universitários estudados que responsabilizaram o ensino praticado pelo insucesso dos estudantes[2]. As dificuldades sentidas pelos professores no ensino superior e o insucesso dos alunos terão na sua origem razões de natureza variada mas a formação pedagógica dos docentes do ensino superior é certamente uma questão que nos deve merecer mais atenção e consideração, como tem vindo a acontecer em diversos países. Neste sentido vêm as iniciativas da UNESCO para a melhoria do ensino superior, criando redes interuniversitárias de aperfeiçoamento dos professores (Bireaud, 1995).

A relação com a profissão

No seu exercício profissional, os matemáticos lidam com a Matemática enquanto disciplina científica e, em relação aos dois participantes neste estudo, num caso, a actividade matemática é vista como um fim em si mesma, eventualmente com motivações e aplicações 'exteriores', no outro, com fortes conexões com estas aplicações. O primeiro, podemos dizer, trabalha com a Matemática, para a Matemática, o segundo, trabalha com a Matemática na perspectiva da sua utilização em outras áreas. Ambos se centram, fundamentalmente, no conhecimento matemático e visam o seu desenvolvimento ou, no segundo caso, o seu desenvolvimento e aplicação. As professoras lidam essencialmente com a Matemática escolar e não encaram a actividade matemática que desenvolvem como um fim em si. Trabalham com a Matemática, para os alunos. Centram-se, sobretudo, na transmissão, pelo ensino, do conhecimento matemáti-

---

[1] Para explicarem essas dificuldades pedia-se-lhes que escolhessem três razões por ordem de importância, fornecidas numa lista de doze sobre os estudantes, o currículo, os professores e o contexto. As razões mais citadas são as que dizem respeito ao contexto — contexto sócio-económico desfavorável, enquadramento cultural — e aos estudantes, em especial as que referem a sua fraca preparação anterior (43%) e o pouco interesse e investimento no trabalho (19% e 33%, respectivamente); razões devidas aos professores, por exemplo, eventuais carências de formação pedagógica, foram pouco citadas (14%) (Bireaud, 1995, p. 53).

[2] Neste inquérito, mais recente (1987), a maioria das respostas relativas às principais causas do insucesso incidem sobre os estudantes (62%) — mencionando a falta de motivação, de rigor, de espírito crítico — e sobre o ensino secundário (30%) (Bireaud, 1995, pp. 53-54).

co, na aquisição e desenvolvimento da compreensão e das capacidades matemáticas por parte dos alunos.

Do ponto de vista das professoras, a sua prática lectiva e a sua relação com a profissão sofreram algumas alterações significativas ao longo dos anos de experiência profissional. No que se refere à prática lectiva, o estudo realizado permite afirmar que essas alterações se centraram principalmente em dois aspectos: na sua relação com o programa da disciplina e na sua relação com os alunos, entendida num sentido amplo, isto é, envolvendo componentes de relacionamento pessoal e de conhecimento dos alunos, mas entendida também como relação pedagógica e didáctica. Para além disto, o estudo dá também indicações que alterações no primeiro dos aspectos mencionados têm implicações nas mudanças na relação com os alunos, com o sentido amplo referido. O que está em jogo nestas mudanças é o conhecimento prático do professor, tal como é descrito por Gary Fenstermarcher (1994). Trata-se, na verdade, de um conhecimento — neste caso, dos programas, dos alunos, de problemas de ensino e aprendizagem — desenvolvido a partir das acções que as professoras realizaram na sua prática profissional, e da eventual reflexão que fizeram sobre essas acções e seus resultados. É um conhecimento que, como diz este autor, se relaciona com "o saber fazer as coisas" (p. 12) e com a capacidade de interpretar as acções realizadas.

A evolução profissional das professoras, desde os anos iniciais da profissão até à data deste estudo, pode ser caracterizada, relativamente aos aspectos da prática lectiva atrás mencionados, do seguinte modo. Por um lado, há um conhecimento crescente dos programas da disciplina e a aquisição progressiva de sentimentos de segurança e de à-vontade na condução das aulas que são associados a esse conhecimento dos programas, cada vez mais extenso e aprofundado. Por outro lado, progride também o conhecimento dos alunos nas diversas faixas etárias da escolaridade leccionadas, em particular no que se refere aos padrões de comportamento em aula, às suas expectativas e formas de reagir perante a actuação do professor, às suas reacções na aprendizagem, nomeadamente, no que diz respeito às dificuldades mais frequentes. Por sua vez, este conhecimento dos alunos mais alargado e detalhado é igualmente considerado como um contributo relevante para a aquisição e consolidação do sentimento de autoconfiança do professor em aula, e para o desenvolvimento da sua sensibilidade perante a diversidade de problemas de natureza pedagógica e didáctica que surgem em aula, e da sua capacidade para os resolver.

O esboço traçado da evolução da prática de ensino das professoras, recorrendo apenas às mudanças por elas reconhecidas como mais significativas, revela, numa análise mais detalhada, algumas diferenças importantes no sentido dessa evolução e no conteúdo dessas mudanças em cada uma das professoras. Numa delas, os anos de experiência de ensino e o contacto continuado e prolongado com os programas tê-la-ão progressivamente libertado dos constrangimentos iniciais no sentido do seu cumprimento. Paralelamente, essa experiência terá contribuído para o desenvolvimento de uma visão diferente do papel do professor e do aluno, levando-a, não só a reconhecer as limitações de uma relação didáctica dominada pela sequência de ensino tradicional — exposição (do professor)-prática (dos alunos) — como ainda a relativizar o papel do professor como mero 'explicador', e a valorizar mais a participação, a intervenção e a autonomia dos alunos. Em termos sintéticos, a mudança em questão consistiu numa deslocação da incidência das principais preocupações da professora: do programa da disciplina, para o aluno; da simples exposição dos assuntos, para o envolvimento e trabalho autónomo dos alunos na realização de tarefas. Para além disto, a experiência de ensino, o maior conhecimento dos programas e também dos alunos, bem como a aquisição de uma maior confiança em si própria como professora, terão também contribuído para uma maior disponibilidade e receptividade em relação aos alunos, reconhecendo-se hoje com maior capacidade para compreender e integrar as suas intervenções e gerir os seus comportamentos.

Com a outra professora, aos anos de experiência de ensino, por um lado, não terá correspondido o desenvolvimento de uma emancipação tão sensível em relação aos programas da disciplina, e por outro, essa experiência não se repercutiu, tão apreciavelmente, na problematização da referida sequência de ensino mais corrente, nem se traduziu numa relativização da importância do papel expositivo do professor. O progressivo conhecimento dos programas que a prática de ensino lhe trouxe terá contribuído, acima de tudo, para a aquisição de uma visão global da matéria a ensinar e para uma melhor percepção da importância relativa dos vários assuntos programáticos, com o correspondente sentimento de maior autoconfiança no tratamento desses assuntos em aula e na resolução de eventuais dificuldades manifestadas pelos alunos.

As mudanças descritas nas duas professoras incidem sobre aspectos do conhecimento prático do professor que se enquadram nas categorias estabelecidas por Freema Elbaz (1983) para a análise do conteúdo desse conhecimento. Refiro-me, em particular, ao que esta autora designou por conhecimento curricular e da matéria a ensinar (*subject matter*) e por conhecimento do ensino (*instruction*), onde se inserem, respectivamente, as mudanças relativas ao conhecimento dos programas, as mudanças no conhecimento dos alunos e em aspectos relativos ao processo de ensino propriamente dito[1]. A uma outra das categorias de Elbaz — o conhecimento de si mesmo (*self*) — podemos associar as menções à aquisição de uma maior segurança e à-vontade nas aulas e de um sentimento de autoconfiança, relacionadas com a imagem que têm de si próprias como professoras, bem como a evidência de uma consciência de certas propensões e capacidades individuais e da sua evolução, nomeadamente, relativas ao tratamento dos assuntos matemáticos, à gestão da aula e das atitudes e comportamento dos alunos. Este estudo sustenta assim a relevância das categorias definidas por Elbaz para a análise do conhecimento prático do professor[2].

Relativamente à vivência da profissão, em termos das motivações e gratificação de cada professora, este estudo dá indicações que essa vivência é permeada por dois sentimentos negativos, eventualmente relacionados — desalento e desapontamento — ainda que sentidos com intensidade diferente e com repercussões algo diversas nos dois casos. Do grau de generalização deste tipo de sentimentos, dá conta o relatório "Matemática 2001, diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da Matemática" (APM, 1988) quando reconhece a existência de "algum desencanto com a profissão" (p. 18) entre os professores, sustentada com o facto de quase um quarto dos respondentes no estudo ter manifestado desejo ou intenção em mudar de profissão[3].

[1] O conhecimento do ensino é identificado por Freema Elbaz (1983) com o conhecimento "dos alunos e do processo de ensino-aprendizagem" (p. 45).

[2] Elbaz (1983), recorde-se, escolheu as categorias para analisar o conteúdo do conhecimento prático do professor, não por corresponderem a distinções académicas pré-definidas mas por entender que "reflectem diferenças que são relevantes para o professor" (p. 14).

[3] Esta intenção é maioritariamente justificada pela baixa remuneração salarial, mas também por um sentimento de falta de realização profissional, invocado por cerca de 14% dos professores (20% no 2º ciclo, APM, 1998).

Também as professoras desta investigação não se manifestaram como profissionalmente realizadas e o que é mais aparente na sua relação com a profissão é um sentimento de frustração, associado ao insucesso dos alunos e à sua desmotivação pela aprendizagem da Matemática. Esta frustração é acentuada numa delas pela sensação de impotência face à situação, bem como pelo descrédito crescente com que vê o professor ser olhado pelos alunos e pela sociedade. Todavia, e apesar disto, as professoras reconhecem que a maior motivação no ensino e a principal fonte de gratificação profissional são os alunos, a relação que estabelecem com eles e a aprendizagem que conseguem promover.

Esta situação contrasta nitidamente com o caso dos matemáticos que manifestaram manter uma relação predominantemente positiva com a profissão, com a qual, globalmente, parecem sentir-se motivados e recompensados, aparentando um grau elevado de realização profissional. Estes sentimentos, porém, decorrem, como foi manifesto, essencialmente de uma das vertentes do exercício da sua profissão com que, aparentemente, mais se identificam — a actividade de investigação. A actividade de ensino não parecer desempenhar, a este propósito, um papel muito significativo, embora a combinação destas duas vertentes no docente do ensino superior, pelas relações de mútua fecundidade que essa combinação pode gerar, tenha sido mencionada como potencialmente rica e com repercussões positivas na qualidade de ambas.

Na verdade, é sobretudo com o trabalho de pesquisa, nomeadamente com a sua componente criativa — contribuindo para o acréscimo de conhecimento no campo científico em que trabalham ou para a resolução de problemas de aplicação prática em outras áreas — que os matemáticos justificaram a sua motivação e a gratificação proporcionadas pela profissão que exercem. A outra vertente profissional — a actividade de ensino — não desempenha, visivelmente, um papel de relevo na indução de sentimentos de motivação, gratificação e autorealização profissionais nos matemáticos deste estudo.

Independentemente de outros factores porventura importantes na explicação do grau de motivação e autorealização profissionais como, por exemplo, os relacionados com o estatuto e prestígio sociais da profissão, bem como com as condições de trabalho e com nível da sua remuneração salarial, este estudo sugere factores de outra natureza que adquiriram alguma visibilidade nas professoras e matemáticos estudados e que se tornaram pregnantes no confronto das análises efectuadas, num e noutro caso. Claramente, as professoras e os matemáticos usufruem de forma diferente a profissão que exercem, e têm também uma posição distinta relativamente ao conteúdo 'material' da sua profissão: a Matemática. O maior ou menor bem-estar na profissão e o maior ou menor grau de realização profissional, aparentemente e em termos simples, parecem poder ser associados ao diferente posicionamento, em que cada um se situa, no espaço das seguintes dicotomias que emergiram neste estudo, todas referidas ao exercício profissional: liberdade e autonomia *versus* constrangimento e dependência; aspectos rotineiros *versus* aspectos criativos; reconhecimento público e entre pares *versus* anonimato ou indiferença.

Na verdade, parece ser gerador de bem-estar e realização profissionais o sentimento de poder usufruir de espaços de liberdade e de iniciativa na profissão. Este sentimento contudo, no caso das professoras, parece ser contrariado pelo constrangimento que sentem com origens diversas, por exemplo, na estrutura e organização escolares, no currículo e orientações ministeriais, nas predisposições dos alunos, nas expectativas dos pais. No caso dos matemáticos, ele parece ser favorecido pelo facto de não existirem, ou serem ténues, os constrangimentos curriculares, e pela actividade de investigação que desenvolvem. Este tipo de actividade, para além disso, proporciona, aos matemáticos, campo para o exercício da sua criatividade, e é potencialmente geradora de reconhecimento público na comunidade matemática e na sociedade.

No caso das professoras, o seu envolvimento com a Matemática é, no essencial, circunscrito à Matemática escolar e à prática lectiva, na preparação e realização de aulas, e não transpareceu nelas a possibilidade de um exercício criativo com esse tipo de envolvimento, nem com a actividade de ensino. Para além disso, a tendência social crescente em aferir a qualidade profissional dos professores pelas classificações dos alunos, não lhes é favorável, pelo que não usufruem de um reconhecimento público pela actividade que exercem e, pelo contrário, 'sofrem' o desprestígio da profissão e da figura do professor, quer intra-muros, na escola, quer na sociedade em geral.

Justificar-se-á aqui dizer que existe uma assimetria entre os dois tipos de participantes neste estudo. Os matemáticos escolhidos são, por assim dizer, matemáticos que se tem destacado pela actividade científica desenvolvida e publicamente reconhecida, pelo menos ao nível dos seus pares. No caso em que tal não acontecesse, podemos interrogarmo-nos em que medida a actividade de investigação matemática contribuiria de forma relevante para a sua realização profissional. Em Portugal, a possibilidade do professor do ensino básico e secundário desenvolver investigação na sua área, é ainda muito recente e relativamente limitada. Essa possibilidade tem todavia vindo a alargar-se e a diversificar-se, concretizando-se na realização de mestrados e de doutoramentos, bem como através da participação em projectos de natureza e alcance variados. O envolvimento dos professores neste tipo de actividades e projectos, para além dos contributos que daí podem decorrer em termos da sua formação e desenvolvimento profissionais, proporciona-lhes contextos e práticas propiciadoras de maior realização com a profissão. Para os professores, no entanto, o ensino é o domínio por excelência da sua actividade profissional. A definição de abordagens didácticas específicas, no que elas implicam ao nível da concepção de tarefas e materiais para a aprendizagem da Matemática e todo o processo da sua concretização em aula, constituem um vasto campo para o exercício da actividade criativa e reflexiva do professor, isoladamente ou no quadro de acções de colaboração, como já vem acontecendo, em alguns casos envolvendo a investigação sobre a sua própria prática (GTI, 2002).

Concepções sobre a Matemática e sobre a actividade matemática

As conclusões a seguir apresentadas resultaram da análise do discurso dos participantes sobre a Matemática e a actividade matemática e, no caso das professoras, também da análise das aulas observadas e do seu discurso sobre essas aulas. São expostas em três pontos que incidem sobre os principais atributos da Matemática que, com tonalidades diferentes, e, em certos casos, pela sua desvalorização ou omissão, compõem a sua visão desta ciência — A beleza matemática; O rigor, a exactidão e o carácter dedutivo da Matemática; A aplicabilidade da Matemática e a sua relação com a realidade — seguidos de outros dois pontos dedicados à actividade matemática. Estes dois pontos referem-se às modalidades dessa actividade que emergiram com maior pregnância no estudo — A demonstração, o cálculo e a matematização — e a aspectos não especificamente matemáticos que se revelaram mais relevantes na forma como os participantes a caracterizaram — A compreensão e a autonomia.

Duas observações preliminares. Em primeiro lugar, num trabalho com matemáticos incidindo sobre as imagens que têm da Matemática, Roberta Mura (1993)[1] afirma que "o nível de interesse em questões filosóficas e históricas entre os matemáticos do [seu] estudo parece ser bastante baixo" (p. 382). Na verdade, questões que implicam uma reflexão sobre a Matemática enquanto conhecimento e actividade científica, também não parecem estar incluídos entre as preocupações mais prioritárias dos matemáticos do presente trabalho[2]. O mesmo acontece, e de uma forma mais notória, no caso das professoras, situação já observada num estudo que realizei anteriormente sobre concepções de professores relativas à Matemática e ao seu ensino (Guimarães, 1988).

Em segundo lugar, num outro estudo de natureza quantitativa, incidindo sobre a imagem da Matemática de professores universitários alemães desta disciplina, Stefan Grigutsh e Günter Törner (1998) isolaram cinco dimensões que consideram definir, "num grau considerável" (p. 14) a visão que esses professores têm da sua ciência[3]. Este estudo salienta assim elementos comuns ou de homogeneidade na visão dos matemáticos, sustentando os autores que "podemos bem fundamentadamente assumir que essas dimensões constituem dimensões geralmente relevantes" (p. 14) para a caracterização de tal visão. Leone Burton (1998), no seu trabalho sobre as práticas de investigação dos matemáticos, aponta em sentido diferente, sublinhando os elementos de "hete-

---

[1] Neste trabalho, R. Mura (1993) recorreu a um questionário distribuído a membros de departamentos de Matemática (*mathematical sciences*) em universidades canadianas, e a observação citada é feita essencialmente com base na análise das respostas à seguinte questão: "como definiria Matemática?" (p. 378).

[2] Vem a propósito desta observação, a consideração de A. Borel (1983) quando afirma que "para um matemático em actividade (*practicing mathematician*), existe uma relutância muito natural em filosofar sobre a Matemática, em vez de simplesmente falar de Matemática" (p. 9), e também a de Jean Dieudonné (1982) quando diz que 95% dos matemáticos pouco se interessam pelas "questões filosóficas" (pp. 16-17) aplicadas à sua disciplina.

[3] Como S. Grigutsch e G. Törner (1998) reconhecem, dadas as opções metodológicas, a visão da Matemática que o seu estudo proporciona é "global e pouco detalhada" (*rough*) (p. 8). Utilizando uma análise factorial, as dimensões isoladas para a caracterização dessa visão foram: "Formalismo (*formalism*)", "Esquema (*schema*)", "Processo (*process*)", "Aplicação (*application*)" e "Platonismo (*platonism*). De uma forma muito sintética, segundo cada uma destas dimensões, a Matemática é caracterizada, respectivamente, pela sua "exactidão", "como um conjunto de regras e procedimentos", "como uma actividade de pensar sobre problemas", "pela sua utilidade prática" e pela sua natureza estética e independência da realidade (*reality-distant*) (p. 14-18). Neste estudo, os autores analisaram as respostas de cerca 120 matemáticos a um questionário estruturado de questões de resposta fechada, pessoalmente distribuído, e recolhido, durante um encontro anual da União Matemática Alemã.

rogeneidade" que o seu trabalho revelou, nomeadamente; "na forma como [os matemáticos] compreendem a Matemática, pensam sobre esta ciência e realizam o seu trabalho matemático" (p. 18). Com este trabalho[1], Burton procurou compreender o processo como os matemáticos chegam ao conhecimento em Matemática (*coming to know mathematics*), confrontando as suas descrições pessoais com um modelo teórico preestabelecido. Este modelo descreve o referido processo em termos de cinco categorias: relação pessoal e socio-cultural, estética do pensamento matemático, papel da intuição e do *insight*, estilos de pensamento e conexões matemáticas (p. 17). Em trabalhos que publicou posteriormente (Burton, 1999, 2001), a heterogeneidade entre os matemáticos é também evidenciada, nomeadamente quando afirma que, embora os participantes do estudo considerassem o seu modelo teórico apropriado às práticas de investigação que desenvolvem, "posicionaram-se individualmente de forma muito diferente" em relação às várias categorias do modelo, com excepção de uma, "a importância da conexões" (*connectivities*), em relação à qual a concordância foi unânime (Burton, 2001, p. 591).

No que diz respeito ao presente estudo, foram identificados elementos de homogeneidade (aspectos comuns, convergências, semelhanças) nas concepções dos matemáticos, e também das professoras, mas emergiram igualmente elementos de heterogeneidade (singularidades, divergências, contrastes) significativos entre os dois matemáticos, entre as duas professoras, e ainda entre estas e os dois matemáticos.

A beleza matemática. Esta investigação permite identificar um conjunto de atributos de natureza diversa com que a Matemática surge aos olhos dos participantes envolvidos que dão indicações sobre as suas concepções relativas a esta ciência. Alguns desses atributos consistem em características conferidas à Matemática que fazem sobretudo apelo à sensibilidade estética e são associados ao reconhecimento de uma beleza matemática. Serão aqui designados por atributos de natureza estética. É sabido que muitos matemáticos se referem à existência de uma beleza na Matemática, bem como ao facto de que, em muitas situações, são

[1] Leone Burton realizou este trabalho em 1997 com setenta matemáticos (homens e mulhers no mesmo número) de mais de duas dezenas de universidades da Reino Unido. Realizou sessenta e quatro entrevistas presenciais e seis por telefone, tendo recolhido material de natureza qualitativa e quantitativa que analisou recorrendo a intrumentos computacionais (Burton, 2001).

critérios de natureza estética que orientam o seu trabalho criativo e presidem às decisões que tomam nesse trabalho. "O apelo estético da Matemática", dizem-nos Davis e Hersh (1981), "seja na contemplação passiva, seja no verdadeiro trabalho de pesquisa, tem sido testemunhado por muitos autores" (p. 168). Para G. H. Hardy (1988), por exemplo, as criações do matemático devem, acima de tudo, ser belas e, em Matemática, "a beleza é o primeiro teste" (p. 2003). John von Neumann (1988), referindo-se aos domínios muito abstractos da Matemática onde o trabalho de investigação se processa independentemente de qualquer eventual aplicação, considera que "os critérios de selecção e de sucesso são sobretudo estéticos" (p. 2037). Uma característica do matemático Herman Weyl, conta-nos James R. Newman (1988), era o sentido estético que "dominava o seu pensamento em todos os domínios" acrescentando que ele dizia que quando tinha que optar entre o verdadeiro e o belo, "geralmente opta[va] pelo belo" (p. 1804). Também Henri Poincaré (1908), discorrendo sobre o processo de criação matemática, faz apelo à sensibilidade estética, "ao sentimento da beleza matemática (...) que todos os verdadeiros matemáticos conhecem" (p. 367), atribuindo-lhe um papel de relevo nesse processo[1].

Nesta investigação, a beleza da Matemática não sobressaiu como um atributo expressivo na visão que os professores envolvidos têm desta ciência. Contudo, o seu reconhecimento foi mais notório nos matemáticos do que nas professoras embora, num caso e noutro, tenha sido manifesta alguma dificuldade em discorrer sobre este assunto[2]. Mesmo assim, considerando os percursos de vida escolar dos participantes deste estudo, pode pôr-se a hipótese da existência de um nexo entre tal reconhecimento e a precocidade com que neles se revelou o gosto pela Matemática e a estabilidade (ou intensificação) deste gosto durante a sua escolaridade pré-universitária e superior. De facto, foram os matemáticos e a professora que mais cedo sentiu o gosto por esta disciplina, e em que esse gosto se manteve estável durante o ensino pré-universitário e sem muitas per-

[1] Em "*The psycology of invention in the mathematical field*", J. Hadamard (1954) retoma e segue de perto esta ideia de Poincaré. Em particular, considera que inventar é escolher e que, neste processo, a "escolha é imperativamente governada pelo sentido da beleza científica", sendo, esse sentido, um "*meio* indispensável de descoberta" (p. 31, itálico do autor).

[2] O matemático G. H. Hardy (1988), que escreveu sobre a beleza matemática, refere-se à dificuldade da sua definição, mas chama a atenção que o mesmo acontece com qualquer tipo de beleza e, usando a poesia como exemplo, acrescenta que não é o facto de "não sabermos bem o que é um poema belo que nos impede que o reconheçamos quando o lemos" (p. 2004).

turbações no ensino superior, aqueles que se referiram à beleza e a atributos de natureza estética na Matemática. A outra professora, para quem o gosto pela Matemática foi mais tardio e fortemente perturbado no ensino superior, ao ponto do percurso neste nível de ensino lhe ter gerado sentimentos de insegurança e incapacidade e uma atitude de rejeição face à disciplina, não fez menções à beleza da Matemática.

No trabalho de Leone Burton (2001) ressalta alguma diversidade sobre a questão estética em Matemática. Alguns dos participantes, diz-nos a autora, utilizaram termos como "beleza" e "elegância" quando se referiram ao que torna os resultados da pesquisa publicáveis, mas outros não aludiram a aspectos desta natureza. Quando confrontados com a omissão, consideraram que "a Matemática está intimamente relacionada com a estética" mas que tais termos são "excessivamente utilizados" (*over used*) e por isso não os utilizaram (p. 592). Outros ainda evidenciaram contradições, ora considerando a questão irrelevante — *beauty doesn't matter* — ora invocando a beleza para justificar a decepção perante o facto de um determinado resultado não se ter verificado: "é pena, pois (...) teria sido muito belo (*beautiful*)" (p. 593).

Os atributos de natureza estética utilizados pelos participantes deste estudo foram a "harmonia", invocada pelos matemáticos e por uma das professoras, e a "elegância", usada por um dos matemáticos que considerou este atributo como o que melhor traduz a beleza em Matemática. Harmonia e elegância, repare-se, são precisamente os termos que Poincaré (1908) utiliza quando se refere ao sentimento estético que "todos os verdadeiros matemáticos conhecem", aludindo à "harmonia dos números e das formas" e à "elegância geométrica" (p. 367). Importa todavia dizer que, atributos como estes, e a eventual beleza da Matemática que pretendem traduzir ou descrever, não parecem ocupar lugar proeminente, sobretudo no caso das professoras, no modo como os participantes deste estudo concebem a ciência com que trabalham.

No ensaio "*The psycology of invention in the mathematical field*", Jacques Hadamard (1954) retoma e segue de perto as ideias de Poincaré (1908) sobre o processo de criação em Matemática. Em particular, considera que inventar é escolher e que, neste processo, a "escolha é imperativamente governada pelo sentido da beleza científica", sendo, esse sentido, um "*meio* indispensável de descoberta"(p. 31, itálico do autor). Ideias como estas, também expressas por outros matemáticos, sobre a beleza da sua ciência e sobre o papel e importância heurística da sensibilidade estética na produção do conhecimento novo não têm tido grande penetração na Matemática escolar. Numa reacção a esta situação, Tommy Dreyfus e Theodore Eisenberg (1986), apoiados nas ideias de Henry Poincaré (1908) e de outros autores relativamente à Matemática, e nas de Seymour Papert (1985) no que diz respeito ao seu ensino e aprendizagem, defendem que a componente estética deve integrar a educação matemática dos alunos, e chegam a considerar como "um tremendo erro" (p. 9) o facto de tal não estar a ser contemplado como uma finalidade curricular importante.

O desenvolvimento do sentido estético e da capacidade de apreciar a beleza matemática por parte dos alunos não têm sido valorizados nos objectivos e orientações curriculares, quer em documentos programáticos internacionais muito divulgados e com larga influência (NCTM, 1991a; NCTM, 2000), quer nos mais recentes documentos portugueses com a mesma natureza (DEB, 2001; DES, 1997). "Por que razão privar alunos de Matemática do prazer estético de que os matemáticos falam?", pergunta Leone Burton (2001, p. 201), rejeitando o argumento tantas vezes utilizado de que é preciso, em primeiro lugar, que aprendam o que é mais elementar para que possam depois aceder a uma compreensão mais profunda e plena da Matemática e da sua beleza. Esta ideia muito espalhada concorre, segundo a autora, para que os estudantes não desejem progredir no seu conhecimento em Matemática, e a privação dos alunos do elemento estético favorece atitudes negativas e concepções distorcidas relativas a esta ciência.

Seymor Papert considera que os aspectos estéticos da Matemática no seu ensino quando são considerados surgem apenas como um "epifenómeno" e não como "a força motora que faz funcionar o pensamento matemático"[1] (Papert, 1985, p. 227). Num paralelismo com a arte, a música e a poesia, Dreyfus e Eisenberg (1986) consideram que a capacidade de apreciação estética também pode ser desenvolvida em Matemática, "alimentada" como dizem, pelo entendimento das estruturas que lhe são subjacentes. Terá assim, eventualmente, um papel importante na aprendizagem, como motivação, certamente, mas também

[1] Papert (1985), de alguma forma, explica a sua consideração pela grande expansão e influência das teorias psicológicas como as de Piaget que, como diz, "ignoram totalmente o estético ou mesmo o intuitivo e se concentram na análise estrutural da vertente lógica do pensamento matemático" (p. 227).

como factor que favorável à aquisição e desenvolvimento dos conhecimentos e capacidades dos alunos e do seu pensamento matemático. Se o sentido estético, em particular na Matemática, é útil à criação nesta área científica, não o será igualmente quanto está em jogo a sua aprendizagem?

O rigor, a exactidão e o carácter dedutivo da Matemática. Um conjunto de atributos de um outro tipo, que apelam sobretudo à racionalidade ou à intelecção e que serão designados por atributos de natureza lógica ou intelectiva, sobressaiu de forma mais evidente nesta investigação. Cabem aí características como a "unidade" e a "coerência interna" que um dos matemáticos também utilizou para descrever a beleza da Matemática. São todavia as qualidades como o carácter rigoroso e exacto da Matemática e a sua natureza dedutiva que mais se destacam como os atributos que melhor caracterizam esta ciência, do ponto de vista dos participantes deste estudo. Neste mesmo sentido apontam os resultados de outros estudos sobre as concepções de professores nos vários níveis de escolaridade do ensino não superior[1]. Numa revisão incidindo sobre investigação realizada em Portugal neste nível de ensino (Ponte, Matos e Abrantes, 1998) diz-se mesmo, a propósito das concepções dos professores, que os trabalhos revistos, no essencial, evidenciam "uma visão geral da Matemática muito marcada pelos aspectos formais, lógicos e dedutivos, em que se distingue perfeitamente o certo do errado" (p. 231).

No ensino superior, a investigação sobre as concepções dos matemáticos é reduzida, mas trabalhos como os de R. Mura (1993) e de S. Grigutsch e G. Törner (1998) dão também indicações do mesmo tipo, a propósito da presença de atributos desta natureza na forma como os matemáticos concebem a sua ciência. No caso de Roberta Mura, a autora sublinha "a alta frequência dos temas típicos do formalismo[2]: uma ênfase na abstracção, na lógica, no rigor, na notação e no simbolismo" (p. 383), entre os temas que emergiram na análise de conteúdo das respostas dos matemáticos estudados. Por sua vez, no trabalho de Stefan Grigutsch e Günter Törner, o "aspecto formalismo" (*formalism aspect*)

[1] Por exemplo em A. A. Ribeiro (1995), A. M. Boavida (1993), A. F. Azevedo (1993), H. M. Guimarães (1988).

[2] R. Mura (1983) esclarece que o facto de usar o termo "formalismo" não significa que se esteja a referir a uma "posição filosófica clara" uma vez que, como diz, a abstracção, a lógica e simbolismo, não pertencem a uma única escola filosófica sobre a Matemática (p. 383).

foi uma das dimensões isoladas para a caracterização da imagem da Matemática no estudo que realizaram com professores universitários desta disciplina. Esta dimensão é apresentada como sendo aquela segundo a qual "a Matemática é caracterizada pelo rigor em diferentes níveis": ao nível da terminologia e da linguagem; ao nível do pensamento — "determinada pela lógica, isto é, pela precisão e rigor lógico, ausência de erro e abstracção"; ao nível da argumentação e da demonstração "com recurso à lógica formal e ao método dedutivo rigoroso"; e, ao nível da sua estrutura (p. 14). Os autores afirmam que na imagem da Matemática que a maioria dos referidos professores possui, essa dimensão tem uma presença "clara" (p. 20) e essa imagem é em "larga medida caracterizada pelo rigor formal" (p. 25)[1].

A ideia da Matemática como uma ciência exacta e rigorosa revelou-se como um dos traços mais nítidos, e porventura mais vincados, das concepções dos professores estudados sobre a Matemática. Rigor e exactidão são dos atributos mais utilizados para caracterizar esta ciência e incluem-se entre os que são evocados mais espontaneamente, como outros estudos têm disso dado indicação. Estes atributos, como também aconteceu no presente estudo, são associados ao carácter lógico e dedutivo reconhecido à Matemática, e todas estas qualidades são consideradas como lhe sendo próprias e exclusivas, conferindo-lhe uma marca distintiva face às outras ciências.

Nesta investigação, foi essencialmente a atributos desta natureza que as professoras aludiram quando explicaram o seu gosto e preferência pela disciplina que ensinam e a distinguiram das outras ciências. A única professora que se referiu à beleza da Matemática, acrescente-se ainda, associou-a a atributos desse tipo e vê neles a superioridade que atribuiu à Matemática. A concepção da Matemática como ciência do rigor e da certeza, exprime-se, nas professoras, através da consideração da Matemática como um domínio do conhecimento onde é sempre possível distinguir com clareza o certo do errado ou o verdadeiro do falso, ou seja, como uma área científica onde não há lugar para ambiguidades. Esta concepção está também presente nos matemáticos deste estudo, num

[1] Grigutsch e Törner (1998) consideram que a dimensão referida mereceu "elevada concordância" (p. 31) entre os matemáticos estudados; afirmam que "mais de 60% dos professores universitários, claramente, vêm na Matemática a dimensão formalismo e um elevado grau de rigor formal" e acrescentam: "apenas 5.2%" consideram que essa dimensão apenas caracteriza "parcialmente" a Matemática e nenhum a rejeita completamente (p. 20).

deles, porventura, de uma forma mais extremada e enraizada do que no outro. Na verdade, para ambos é possível, num determinado quadro axiomático, estar-se certo da verdade matemática e, em alguns domínios, considerar-se como definitivos determinados resultados matemáticos. Todavia, enquanto que num deles, sobressai a visão de uma Matemática eminentemente dedutiva, "completamente exacta", o outro reconhece também fragilidades na sua ciência e encara com reservas a ideia de um rigor absoluto e de uma completa segurança e solidez do seu conhecimento. Este matemático, se separa e distingue a Matemática das outras ciências pela sua componente lógica e dedutiva, encontra também analogias entre elas, nomeadamente, quando valoriza a componente experimental na produção do conhecimento matemático (no sentido de pesquisa de regularidades, formulação e teste de conjecturas ou de elaboração e verificação de modelos matemáticos). Podemos assim reconhecer nestas concepções a presença de elementos de uma visão euclidiana da Matemática (veja-se "o mito de Euclides" em Davis e Hersh (1981), e de elementos de uma concepção mais abrangente, que reconhece na Matemática, muito em particular enquanto processo de criação, uma faceta informal (Lakatos, 1993), quase empírica (Lakatos, 1990), regida pelo raciocínio plausível (Pólya, 1990), a par de uma Matemática formal, logicamente organizada e justificada, lugar por excelência do raciocínio demonstrativo.

A aplicabilidade e a relação da Matemática com a realidade. A ideia da Matemática como uma ciência de grande utilidade e aplicação nos mais diversos domínios da actividade humana emergiu também com clareza como um dos traços das concepções sobre Matemática dos participantes desta investigação. Esta mesma indicação, dão-na igualmente outros trabalhos sobre o estudo das concepções dos professores, no âmbito do ensino não superior[1]. No que aos professores universitários diz respeito, os estudos de R. Mura (1993) e de S. Grigutsch e G. Törner (1998) mostram também a presença do mesmo traço nas concepções dos matemáticos que, inclusivamente, no segundo destes trabalhos, constituiu uma das dimensões na caracterização da imagem que os professores envolvidos têm da Matemática. No entanto, é também possível ver

[1] Veja-se, por exemplo A. P. Canavarro (1993), E. F. Rodrigues (1993), A. F. Azevedo (1993), H. M. Guimarães (1988), S. Llinares (1988).

no estudo de Grigutsch e Törner algum distanciamento da parte dos matemáticos alemães, relativamente à dimensão de aplicação da Matemática[1]. Os próprios autores consideram que os matemáticos estudados manifestaram uma posição relativamente reservada relativamente a tal dimensão, e salientam o facto de ser ainda bastante generalizada o que designam por "prática introvertida da Matemática" (p. 31). No caso do trabalho de Leone Burton (2001), a categoria relativa às conexões matemáticas, internas ou com outras disciplinas e domínios não matemáticos, foi, como referi, a única onde as respostas dos matemáticos foram homogéneas. "Quase todos", diz-nos a autora, consideraram "muito importante" a relação da Matemática que praticavam com outras áreas matemáticas ou com situações do "mundo real" (p. 594) quando foram questionados a esse propósito.

Numa análise mais detalhada sobre questão da relação da Matemática com as outras ciências e com a realidade podem ser identificadas duas componentes nas concepções dos professores desta investigação. Sobressai, em primeiro lugar, como mais geral e dominante, uma visão da Matemática que podemos chamar instrumental. Nessa relação, a Matemática parece ser encarada essencialmente como municiadora de ferramentas — teóricas, conceptuais, de linguagem — consideradas indispensáveis quer à resolução de problemas que as ciências e o estudo da realidade levantam, quer ao desenvolvimento científico em geral. A esta característica da Matemática foi reconhecida grande universalidade, sendo patente a ideia de que todo conhecimento matemático é aplicável, mesmo se motivado e desenvolvido sem tal intuito. A natureza abstracta da Matemática e o seu carácter exacto e rigoroso foram os atributos utilizados para explicar a diversidade das suas aplicações. Cabe aqui dizer que, para um dos matemáticos, a contribuição da Matemática nos diversos campos científicos não se reduz à introdução de "ordem e rigor", mas consiste também possibilitar uma abordagem não exclusivamente empírica.

Em segundo lugar, é também possível discernir, no modo como a relação da Matemática com as ciências e a realidade é entendida pelos participantes deste estudo, a ideia de que existe reciprocidade nessa relação. Ou seja, a ideia de que,

---

[1] É dito, por exemplo, que "mais de um terço" dos matemáticos do estudo manifestaram um posição "indecisa" e 15% optaram por uma posição de distanciamento, em itens relacionados com a dimensão de aplicação da Matemática (Grigutsch e Törner, 1998, p. 23).

se há um movimento — de aplicação — da Matemática para as ciências (e realidade) há, reciprocamente, um movimento destas para a Matemática, movimento concebido como estimulante e inspirador do desenvolvimento do conhecimento matemático. É assim reconhecido à Matemática um vínculo com as ciências e o mundo empírico encarados, não só como domínio de aplicação do conhecimento matemático, mas como fonte, ou origem, desse conhecimento, ainda que, como foi considerado por um dos matemáticos, essa origem possa ser longínqua, ou, muito difícil de reconhecer em domínios mais abstractos. Este matemático, a propósito da génese e desenvolvimento do conhecimento em Matemática, embora reconhecendo a importância dos estímulos e influências exteriores, sublinhou que, na Matemática, o conhecimento também se gera obedecendo a leis internas, independentemente de qualquer futura aplicação.

Relativamente aos matemáticos, no que diz respeito ao atributo da Matemática agora em questão — a sua aplicabilidade — e também à relação desta ciência com a realidade, para além do que já foi referido, o presente estudo permite entrever mais algum detalhe sobre as suas concepções e identificar elementos de diferenciação ou heterogeneidade. Se recordarmos as áreas por que se sentiam mais atraídos antes de, em definitivo, optarem pela Matemática — a Engenharia e a Física, respectivamente — podemos ver, entre essas áreas e os domínios matemáticos em que actualmente trabalham, um traço comum: alguma forma de relação com a realidade. Todavia, esta relação, muito patente, directa e estreita no primeiro caso, mas menos óbvia e directa, e também mais distante, no segundo caso, tem um papel distinto no trabalho de investigação de cada um e é vivida de modo diferente pelos dois matemáticos.

Num dos matemáticos, a relação com a realidade está presente de forma relativamente remota e sobretudo ao nível da origem dos problemas que estuda, parecendo depois existir uma espécie de 'apagamento' ou 'esquecimento' dessa relação. As aplicações da Matemática, são para ele sobretudo um meio adequado para a popularização desta ciência e como motivação dos alunos para a sua aprendizagem. No caso deste matemático, eventuais implicações de natureza prática ou possíveis aplicações em outros domínios de resultados matemáticos, não constituiem aquilo que mais o preocupa e interessa, nem parecem ser a sua principal satisfação no trabalho que realiza. As compensações que retira do trabalho de investigação, situa-as ao nível de poder contribuir para o desenvolvimento do conhecimento matemático e encontra nesta possibilidade a principal motivação para esse trabalho.

Com o outro dos matemáticos deste estudo, a situação é substancialmente diferente. Neste caso, a relação com a realidade é inerente à pesquisa que desenvolve, uma vez que é estimulada por problemas de natureza prática em situações reais e visa contribuir para a resolução desses problemas. O binómio investigação-aplicação está sempre presente e a realidade é, simultaneamente, ponto de partida e de chegada da investigação matemática, processo de 'vai-vem' repetido que concorre para a solução do problema visado e para o desenvolvimento do conhecimento matemático posto em acção. Para além disso, a possibilidade de ver aplicados os resultados do trabalho realizado proporciona-lhe, uma grande motivação e um sentimento de gratificação, e foi com essa possibilidade que justificou a sua predilecção pela área matemática em que trabalha. Do seu ponto de vista, os matemáticos em geral usufruem desse sentimento que considerou natural, mesmo se, na investigação que realizam, não é a eventual aplicação dos seus resultados, aquilo que os faz mover.

A propósito da forma como cada um dos matemáticos explicou o seu gosto pela sua ciência, sobressai uma outra diferença entre eles: um, manteve-se sempre no interior da Matemática e justificou-o sobretudo com atributos de ordem estética e com o sentimento de poder contribuir para o desenvolvimento do conhecimento matemático; o outro, evidenciou sobretudo a sua aplicabilidade e a grande gratificação que retira do facto dos resultados que obtém serem utilizados na resolução de problemas práticos reais. Este é o matemático que iniciou os seus estudos superiores em Engenharia e quando optou pela Matemática fê-lo escolhendo um domínio da Matemática dita aplicada. No caso do outro matemático, o seu primeiro interesse foi pelos aspectos mais 'puros' da Matemática, pelos seus aspectos mais abstractos e herméticos, como se lhes referiu. Posteriormente escolheu um domínio mais próximo das aplicações da Matemática, mas essa escolha não correspondeu a uma maior propensão ou motivação no matemático em relação a essas aplicações. Foi justificada pelo enquadramento institucional em que se encontrava e pela influência das pessoas com quem trabalhava, não pela natureza mais 'aplicada' do domínio de trabalho escolhido.

Estas diferenças entre os dois matemáticos podem ser relacionadas com os seus percursos académicos mas também ser entendidas à luz da dualidade que

Fulvia Furinghetti (1992) apresenta entre uma concepção da Matemática como uma ciência "auto-contida (*self-contained*) com o seu próprio valor (*valence*) e beleza", e uma concepção segundo a qual a Matemática é "um instrumento de aplicação em outras disciplinas" (p. 1). Esta dualidade, extremando um pouco, exprime uma discussão que persiste entre os matemáticos, onde se confrontam as posições internalista e externalista sobre a Matemática, ou seja, entre uma concepção segundo a qual esta é uma disciplina científica cuja origem e desenvolvimento, natureza e valor podem, no essencial, ser explicados por razões internas à Matemática, e a outra, sustentando que tal explicação não é possível sem sair dos limites da Matemática. A este respeito, como diz Furinguetti, as posições entre os matemáticos não são pacíficas e uniformes mas "tempestuosas e controversas" (p. 1), e a autora sugere que tal situação não tem sido muito esclarecedora para os futuros professores de Matemática.

A demonstração, o cálculo e a matematização. Relativamente à actividade matemática, demonstrar, calcular e matematizar são as três modalidades que, de uma forma mais evidente, se revelaram no modo como os participantes desta investigação se lhe referiram e a procuraram caracterizar. Conforme os casos, no entanto, o estudo realizado dá indicações de que cada uma dessas modalidades ocupa um lugar diferenciado na forma como os matemáticos e as professoras concebem a actividade matemática. Na verdade, umas evidenciaram-se mais espontaneamente do que outras e nem todas mereceram igual destaque, sendo perceptíveis, em relação a cada uma, elementos de heterogeneidade relevantes entre os diferentes participantes do estudo.

Começando pela matematização. Podemos entender a matematização como a modalidade da actividade matemática pela qual se realiza a tradução, em termos matemáticos, de situações ou fenómenos, por exemplo, do mundo físico ou social, tendo em vista a sua compreensão ou a resolução de algum problema que tenham suscitado. Em certos casos, a referida tradução conduz à concepção de um modelo matemático que tem por vezes que ser aperfeiçoado num processo de interacção com a situação ou fenómeno que pretende modelar. Trata-se, muito simplificadamente, do que habitualmente se designa modelação matemática, e é uma expressão da relação da Matemática com domínios que lhe são exteriores; uma forma de que se reveste a aplicabilidade da Matemática.

Vimos no ponto anterior que o reconhecimento de que existe alguma espécie de relação da Matemática com a realidade e com as outras ciências e, em particular, da sua grande aplicabilidade nestes domínios, foi notório nos matemáticos e nas professoras deste estudo. Na verdade, este reconhecimento é muito corrente e generalizado na caracterização desta ciência, mas pode ter significados e implicações diferentes na relação da pessoa com a Matemática, e na sua prática de ensino ou de investigação, com essa ciência. Nos dois matemáticos, a sua visão da actividade matemática está claramente associada ao domínio científico em que cada um trabalha e, aparentemente, corresponde ao tipo de investigação que desenvolvem, tendo sido neles manifesta uma relação com os aspectos mais aplicados da Matemática muito diferente, num deles, como vimos, claramente menos presentes e menos valorizados do que no outro. Para este último, a modalidade de eleição da actividade matemática é a modelação, entendida como concepção de modelos matemáticos e desenvolvimento de técnicas e métodos para o trabalho com esses modelos. Para este matemático, os modelos são representações aproximadas da realidade e, em alguma medida, sempre imperfeitos, imperfeição que se revela na aplicação à realidade que pretendem modelar. Assim, essa aplicação, como disse o matemático em questão, vem evidenciar "fraquezas" do conhecimento em Matemática, uma faceta deste conhecimento que, segundo ele, os matemáticos têm relutância em reconhecer. É o movimento de 'vai-vem', entre o modelo e a realidade que, simultaneamente, permite melhorar o conhecimento dessa realidade e aperfeiçoar o modelo e, portanto, fazer também progredir o conhecimento matemático. Vista deste modo, a modelação é bem um exemplo da reciprocidade e fecundidade mútua, atrás referidas, na relação entre a Matemática e a realidade.

Para o outro matemático, a Matemática é uma ciência "completamente exacta" e a actividade matemática foi caracterizada recorrendo ao rigor, ao método dedutivo e à demonstração, eleita como a modalidade por excelência da actividade matemática. Neste matemático, a matematização, entendida como modelação ou aplicação da Matemática não teve grande visibilidade entre as modalidades da actividade matemática que referiu e na forma como a caracterizou. Às aplicações da Matemática, aparentemente, atribui-lhes um papel meramente ilustrativo ou de motivação, considerando-as sobretudo como um meio adequado para a divulgação e popularização desta ciência e uma forma de despertar o interesse dos alunos para a sua aprendizagem.

Uma visão do papel das aplicações da Matemática no ensino similar à anterior permeia também as concepções das professoras. Pese embora a ténue presença dessas aplicações, ou de aspectos da relação da Matemática com a realidade, nas aulas observadas, foi perceptível que o propósito que norteou a sua utilização foi essencialmente o de apresentar 'concretizações', por exemplo, de conceitos, e, desse modo, captar a atenção e o interesse dos alunos para a sua aprendizagem subsequente. Ambas as professoras reconheceram a aplicabilidade como um dos atributos mais característicos da ciência matemática, bem como a importância da integração didáctica das suas aplicações, no entanto, tal reconhecimento não tem tradução significativa na sua prática lectiva. As duas professoras admitiram ter dificuldades em conseguir a referida integração e deram a entender que a matematização e as aplicações ou, de uma forma mais geral, a relação da Matemática com a realidade, está pouco presente e têm poucas consequências no ensino que praticam. Idêntica situação tinha sido já observada em anterior estudo sobre as concepções dos professores (Guimarães, 1988) e também constatada na revisão alargada da investigação sobre estas concepções, já citada (Ponte, Matos e Abrantes, 1998).

Podemos ver em situações como a anteriormente referida, a indicação de incongruência entre as concepções e as práticas dos professores ou, como é sugerido na revisão atrás mencionada, a presença, não de "verdadeiras concepções operativas que informam a sua prática", mas de um reflexo de "representações sociais dominantes" (Ponte, Matos e Abrantes, 1998, p. 232). Ou seja, a presença de um 'lugar comum' sobre a Matemática, traduzindo uma visão corrente e socialmente generalizada dessa ciência, pouco reflectida e aprofundada pelos professores, e com poucas consequências na sua prática.

Alternativamente, podemos interpretar tais situações, não como indicação de incongruência entre concepções e práticas, mas como sinal da presença de concepções conflituantes, porventura com importância diferente para o professor. Tal como as crenças, as concepções podem ser mais ou menos centrais do ponto de vista psicológico, ou seja, não têm todas a mesma importância para a pessoa (Rokeach, 1976), e, para além disso, é possível a coexistência de concepções contraditórias numa pessoa, indício do isolamento do seu sistema conceptual que certos autores referem (ver em Thompson, 1982). Uma situação como esta é explicada pela possibilidade da ocorrência, na pessoa, de agrupamentos de crenças mais ou menos isolados que impede o confronto entre elas e permite a existência de crenças conflituantes (Green, 1971).

Deste modo se poderá compreender a coexistência de concepções das professoras relativas à aplicabilidade da Matemática e à sua importância no ensino, com concepções, contraditórias, mas porventura mais centrais ou importantes para elas, dizendo respeito, por exemplo, aos aspectos formais e abstractos da Matemática, ou a aspectos do seu ensino e aprendizagem, eventualmente limitadores da integração didáctica das aplicações da Matemática, estas sim orientando a sua prática pedagógica.

Sobre a demonstração. Em primeiro lugar, pode ser mencionada a tendência em associar demonstração a dedução, quando se trata de estabelecer a verdade de resultado matemático. Ou seja, sobressai a ideia de que demonstrar é acima de tudo deduzir, estabelecer as conclusões logicamente decorrentes de premissas aceites como verdadeiras. Em segundo lugar, a demonstração e o raciocínio dedutivo aparecem com um lugar proeminente na visão que os participantes desta investigação têm da Matemática e da actividade matemática. Aparentemente, pode ainda ser dito, as observações anteriores sobre a demonstração apenas sobrevêm no quadro da Matemática enquanto ciência e não têm grande expressão quando está em jogo a Matemática escolar.

As concepções dos participantes deste estudo sobre a demonstração não são todavia uniformes e, à visão global atrás descrita, podem acrescentar-se elementos discriminantes para uma descrição mais detalhada dessas concepções. Na verdade, a ideia da demonstração como a modalidade por excelência da actividade matemática aparece com clareza numa das professoras e num dos matemáticos. Ambos reconhecem à demonstração um lugar de grande relevo, vendo nela o que distingue a Matemática das outras ciências e o que lhe confere a sua exactidão e o elevado grau de fiabilidade que lhe atribuem; o método demonstrativo é considerado como o método da Matemática, e, do ponto de vista do matemático, fazer Matemática é demonstrar resultados. Em contrapartida, porém, ideias como estas não tiveram praticamente expressão na outra professora e, no caso do outro matemático, a demonstração é relativizada no quadro de outras modalidades da actividade matemática, no qual a matematização, entendida como processo de modelação, surge com maior destaque. É este matemático que, embora distinguindo a Matemática das outras ciências pelo seu carácter dedutivo, reconhece também uma componente de tipo experimental na actividade matemática, vendo aí a experimentação como concepção e teste de exemplos, bem como pesquisa de regularidades, eventualmente conducente à formulação de conjecturas e sua demonstração. A consideração de uma componente de cariz experimental na Matemática e, em particular, a aceitação da demonstração por via computacional, introduzem uma distinção clara nas concepções deste matemático, face às ideias mais dominantes a este respeito que emergiram no outro, para quem a demonstração, para ser considerada como tal, tem que se revestir de carácter analítico, única via para a aceitação de um resultado como verdadeiro.

A demonstração, importa ainda dizer, independentemente da diferente valorização perceptível nas duas professoras, é uma actividade praticamente omissa das suas aulas, como ambas deixaram entrever. As dificuldades dos alunos em compreenderem a necessidade de uma demonstração e a resistência que opõem à sua realização, bem como a pouca importância que lhe tem sido atribuída nas orientações e conteúdos dos programas, foram as razões apontadas para essa omissão. Para as professoras, os programas anteriores aos que leccionavam[1], privilegiavam os aspectos de cálculo e deixavam pouco espaço para o exercício do raciocínio matemático mais complexo e elaborado, em particular o raciocínio demonstrativo. Em seu entender, resulta desta situação a veiculação, junto dos alunos, de uma imagem da Matemática cujos elementos dominantes são a abstracção e o cálculo, imagem que vêem persistir e que reconhecem ter, elas próprias, muita dificuldade em contrariar e modificar.

Por fim, o cálculo. Em relação a esta modalidade da actividade matemática, este estudo permite também identificar alguma heterogeneidade de posições entre os participantes que indiciam concepções distintas, às vezes conflituantes, até na mesma pessoa. Numa primeira análise, o cálculo parece ser visto uma modalidade da actividade matemática de menor estatuto, no conjunto das várias modalidades que os diferentes participantes destacaram. As duas professoras consideraram o cálculo como algo que não as atraía particularmente e manifes-

[1] Trata-se dos programas que foram substituídos com a reforma cuja generalização se iniciou no ano lectivo de 1991/92.

taram mesmo algum distanciamento em relação a ele. Os dois matemáticos praticamente não o mencionaram no quadro da Matemática enquanto ciência.

Todavia, a visão do cálculo, manifesta em cada uma das professoras, tem diferentes matizes que evidenciam concepções também diferentes relativamente ao seu papel e importância. Uma delas considera-o como uma modalidade relativamente secundária da actividade matemática e de carácter essencialmente instrumental. A outra professora valoriza-o claramente mais, reconhecendo-o como uma parte importante dessa actividade e encarando-o como pré-requisito essencial à aprendizagem conceptual em Matemática. Podemos identificar uma visão idêntica no matemático que explicou as dificuldades dos alunos nas suas aulas, em larga medida com a deficiência nos aspectos de cálculo que eles trazem do ensino secundário, aspectos que considerou fundamentais e parte importante da Matemática, e sem o devido relevo nesse nível de ensino. Este matemático, como a professora mencionada, não parecem na verdade subalternizar o cálculo, pelo menos no quadro da Matemática escolar.

Para além disso, foi reconhecido pelas professoras que o cálculo é a actividade mais trabalhada no ensino. Nas aulas observadas, apesar das diferenças que manifestaram no modo como o encaram, o cálculo — numérico, algébrico ou lógico — esteve de facto muito presente, com uma dominância clara face a outras actividades. E, pelo que as professoras deram a entender, será uma parte geralmente muito significativa do trabalho que os seus alunos realizam em aula. Do seu ponto de vista, o cálculo é particularmente apreciado pelos alunos e eles, uma vez que dominem as regras e técnicas em jogo, preferem-no a actividades de carácter problemático ou de natureza geométrica. Não parece, portanto, existir, também na prática de ensino, a referida subalternização do cálculo, ficando a ideia de que, aparentemente, apenas tem lugar no quadro da Matemática enquanto ciência ou ao nível da relação pessoal com esse tipo de actividade.

Sobre o cálculo pode assim ser dito que, globalmente, do ponto de vista dos participantes deste estudo, como aconteceu com a demonstração, ele parece ser encarado de modo diferente conforme esteja em jogo a Matemática como ciência ou a Matemática escolar. Porém, ao contrário da demonstração, à qual é reconhecido um estatuto superior na ciência Matemática e dada uma expressão pouco significativa na Matemática escolar, o cálculo, aparentemente, é subalternizado na Matemática como ciência, mas é visto como uma faceta importante da

Matemática escolar e ocupa uma parte considerável do trabalho dos alunos com a disciplina. Esta observação em relação ao cálculo é também recíproca da que foi manifesta no caso da matematização e da aplicabilidade da Matemática que, como vimos, são encaradas como aspectos importantes e característicos da ciência Matemática mas com pouca expressão na prática de ensino das professoras deste estudo.

A compreensão e a autonomia. Para além das concepções descritas no ponto anterior, relativas às três modalidades da actividade matemática que se evidenciaram com maior visibilidade neste estudo, a investigação realizada permite dar conta de outros traços nas concepções dos professores envolvidos que dizem respeito a outros aspectos dessa actividade. Estes aspectos, ao contrário das modalidades consideradas — a matematização, o cálculo e a demonstração — não se referem a formas de que a actividade matemática se pode revestir. São melhor descritos como uma espécie de seus 'ingredientes' cuja presença é considerada necessária para que a actividade possa, justamente, ter carácter matemático. Alguns destes ingredientes, tal como as modalidades mencionadas, remetem para uma especificidade matemática e reportam-se à actividade *per se*, isto é, não se referem ao sujeito nelas envolvido. É o caso dos conceitos, regras ou técnicas matemáticas, vistos pelos participantes deste estudo como ingredientes 'naturais' de uma actividade matemática, a propósito dos quais se justificam duas observações.

Em primeiro lugar, aos conceitos e às regras ou técnicas não é aparentemente reconhecido o mesmo estatuto matemático nem, passe o neologismo, a mesma 'matematicidade'. Por exemplo, tratando-se de ajuizar do carácter matemático de uma actividade, o conceito parece ter superioridade face à regra ou à técnica e maior capacidade em lhe conferir tal carácter. O facto de 'lidar com conceitos' aparece assim como mais característico e marcante de uma actividade matemática do que o 'lidar com regras e técnicas'. Em segundo lugar, uma observação particularmente notória no caso das professoras, certamente por terem como quadro de referência dominante a Matemática escolar e a sua aprendizagem: nesse 'lidar com', a compreensão, por parte do aluno que realiza a actividade, dos conceitos, regras ou técnicas em jogo, é tida como indispensável para que essa actividade tenha um cunho matemático, para que ele esteja a 'fazer Matemática'. Ou seja, a compreensão é igualmente considerada como um elemento 'que entra' numa actividade matemática, como um outro ingrediente das actividades desta natureza. O mesmo pode ser dito em relação à autonomia da pessoa na realização dessas actividades, aspecto que os matemáticos destacaram como sendo aquilo de que os alunos carecem para que, metaforicamente, os pudessem considerar como matemáticos na sala de aula, e que também foi manifesto no caso de uma das professoras. Ao contrário dos anteriores — conceitos, regras, técnicas — a compreensão e a autonomia são ingredientes de carácter geral, isto é, não remetem para nada específico da Matemática e, para além disso, referem-se ao sujeito da actividade, ao modo como está envolvido na actividade e ao papel que nela desempenha.

A compreensão, contraposta à simples memorização ou mecanização na aprendizagem, e a autonomia, em oposição à dependência do aluno, compõem duas dicotomias no espaço das quais é possível dar conta de mais alguns aspectos da forma como os matemáticos e as professoras concebem a actividade matemática. Em relação à compreensão, foi manifesta a sua valorização em detrimento da memorização, estejam em jogo conceitos, regras ou técnicas; a simples memorização ou aplicação mecanizada desses conceitos, regras ou técnicas não é vista como saber Matemática. Deste modo, no contexto da aprendizagem desta disciplina, a ideia de que 'compreender é mais importante do que memorizar' traduz, numa formulação simples, um aspecto das concepções dos participantes deste estudo sobre a actividade matemática e sobre essa aprendizagem[1]. Esta ideia é uma noção abrangente e valorativa, e dá indicações da intenção do professor no ensino, pelo que podemos associá-la ao conceito de "imagem" proposto por Freema Elbaz (1983, p. 45)[2] como o elemento estruturante mais geral do conhecimento do professor.

Manifesta em ambas as professoras, esta imagem tem, no entanto, diferente tradução nas aulas de cada uma. Por exemplo, analisando a forma como intro-

[1] A aprendizagem da Matemática com compreensão é uma ideia nuclear apresentada como um esteio fundamental da proposta do NCTM para Matemática escolar descrita nos seus *Principles and Standards*, e constitui um dos seis princípios aí consagrados que enquadram e fundamentam essa proposta (NCTM, 2000).

[2] Para Elbaz (1988), uma imagem "é geralmente imbuída de um juízo de valor e exprime com frequência, de um modo particularmente claro, determinado propósito do trabalho [do professor] no seu ensino" (p. 137).

duzem um assunto matemático novo, sobressai um princípio de carácter metodológico que pode ser enunciado do seguinte modo: 'começar por um exemplo' (do conceito ou de aplicação da regra a ensinar). Todavia, se ambas as professoras 'começam' com exemplos, tais exemplos têm funções distintas: uma delas emprega-os fundamentalmente com uma função heurística, e a outra, com uma função ilustrativa. Neste último caso, a professora explica, com os exemplos, o conceito em jogo ou mostra como a regra considerada se aplica, enquanto que, no outro caso, a professora pretende que os alunos, com base nos exemplos, 'descubram' por si próprios o conceito ou a regra em questão. Esta professora, podemos dizer, tem uma concepção de ensino que inclui uma outra imagem, a da 'aprendizagem como descoberta', a que, claramente, está associada a valorização da autonomia do aluno, o que não é evidente na outra professora que, contrariamente, entende que os conceitos são, em geral, 'dados' aos alunos pelo professor. Aquela autonomia é entendida como a capacidade do aluno, não só em tomar a iniciativa de colocar dúvidas ou questões sobre o trabalho em curso, mas também de, 'por si só', estabelecer relações, extrair conclusões, fazer generalizações com base nesse trabalho. De facto, na abordagem didáctica da professora em questão, foi manifesto um outro princípio que pode ser expresso por 'proceder do particular para o geral', princípio que incorpora uma lógica de tipo indutivo na aprendizagem, enquanto processo de aquisição ou desenvolvimento de conhecimento por parte dos alunos, e que também remete para a valorização da sua autonomia.

Em ambas as professoras foi ainda perceptível a ideia de que a aprendizagem deve prosseguir 'do concreto para o abstracto' e 'do simples para o complexo'. Esta ideia contém dois outros princípios que, como os anteriores — 'começar com um exemplo' e 'proceder do particular para o geral' — evidenciam um vínculo directo com a acção. Evocam assim a noção de "princípio prático" de Freema Elbaz (1983), elementos estruturadores do conhecimento do professor mediadores da relação entre o seu pensamento e a sua acção.

As imagens e os princípios práticos mencionados exprimem o propósito de promover a compreensão dos alunos, também expresso na utilização, por parte das professoras, de apoios intuitivos de carácter visual ou manipulativo como suporte da aprendizagem. Aprender com compreensão promove igualmente a autonomia dos alunos, ela também directamente visada, como vimos, em especial no caso de uma das professoras. Todavia, regressando às dicotomias compreensão — memorização e autonomia — dependência, a ênfase dada na aprendizagem 'oscila' de um pólo dessas dicotomias para o outro. Numa professora, o segundo pólo tende a dominar sobre o primeiro, mais notoriamente ao nível da prática em aula e sobretudo em relação à dicotomia autonomia—dependência. Na outra, o primeiro pólo tende a prevalecer sobre o segundo, muito embora no contexto de aula se verifique uma tendência para uma inversão, ou seja, para a memorização se sobrepor à compreensão e para a dependência ser preponderante relativamente à autonomia.

Considerações finais

Este estudo deu os primeiros passos em 1992, primeiro trimestre, quando decidi retomar o tema do meu trabalho de mestrado (entretanto terminado havia já três anos) e apresentei as primeiras ideias do projecto de investigação que pretendia levar a cabo, tendo em vista a realização das minhas provas de doutoramento.

Em carta ao meu orientador dizia então:

> De regresso as concepções...
> Este tema, como sabes, é-me caro. Interessa-me e reconheço-lhe bastante importância. Simultaneamente, sinto que é uma área complicada, de difícil (e inseguro) acesso e onde não é fácil conseguir progressos. Antevejo pois (e confesso que me assusto um pouco) bastantes dificuldades aliás já um pouco experimentadas.
>
> *(carta a João Pedro da Ponte, Abril de 1992)*

Optei pois por manter o tema do meu anterior trabalho mas o meu interesse era especificar mais a sua incidência principal, incluir outros tipos de participantes e diversificar os instrumentos metodológicos. Assim, na mesma carta, dizia também:

> Mantendo-se o tema genérico da tese de mestrado [as concepções dos professores] interessar-me-ia:
>
> 1) Centrar (ou estruturar) o estudo em três vertentes: Fazer Matemática - Ensinar Matemática - Aprender Matemática;
>
> 2) Incluir, como participantes do estudo, matemáticos, professores de Matemática e alunos.
>
> 3) Desenvolver e diversificar a metodologia utilizada, visando, sobretudo, por um lado, uma maior interacção com os professores de Matemática, quer em duração, quer em profundidade, e, por outro, um maior acompanhamento da sua prática pedagógica.
>
> *(carta a João Pedro da Ponte, Abril de 1992)*

A evolução do trabalho não seguiu exactamente estas intenções mas algumas das ideias principais que lhes estavam subjacentes permaneceram e vieram a marcar o desenvolvimento da investigação que realizei. Começando pelo último dos três pontos atrás mencionados, ou seja, pelos aspectos metodológicos. É corrente a ideia que, para o desenvolvimento de um estudo de investigação, há que definir, em primeiro lugar, o que habitualmente se chama problema do estudo, de cuja escolha dependerá a orientação metodológica da investigação. Entendo contudo que esta orientação, na sua formulação geral, precede outras escolhas, temáticas ou de metodologia específica, e em boa parte as determina. Na verdade, a opção metodológica qualitativa, que está na base do meu estudo, decorreu de uma propensão pessoal em relação a abordagens da cariz qualitativo ou interpretativo, na convicção de que, tais abordagens, permitem captar os significados que os sujeitos em estudo atribuem aos objectos com que se depararam ou às situações em que estão envolvidos e às acções que nelas empreendem. Segundo Erickson (1986), recordo, o que mais distingue a investigação interpretativa é o seu "interesse central no significado" (p. 119) e o propósito em o esclarecer e apresentar na investigação.

Foi a minha primeira experiência no estudo das concepções que criou em mim a necessidade de, na investigação que ia encetar, procurar "desenvolver e diversificar a metodologia utilizada", no sentido de, como disse, conseguir uma "maior interacção" com os participantes e, no caso das professoras, um acompanhamento mais prolongado da sua prática lectiva. Desta preocupação resultou o aumento do número das entrevistas a realizar com cada participante e a utilização, nessas entrevistas, do que chamei 'episódios' (anexos 2 e 4). Este procedimento não é muito corrente na investigação nesta área conduzida no nosso país e não existem, por isso, muitos elementos de reflexão sobre a sua utilização. É a meu ver um recurso instrumental com potencialidades variadas que diversifica a interacção com o entrevistado, favorece o seu distanciamento em relação à pessoa do entrevistador e aumenta a sua motivação e envolvimento na entrevista podendo, desta forma, conseguir-se mais informação sobre um determinado assunto ou questão ou abordar novos assuntos e questões.

A análise do material recolhido nas entrevistas deu origem aos 'retratos' escritos de cada um dos participantes que, no caso das professoras incluíram também uma visão da sua prática proporcionada pela observação de aulas. Estes retratos foram organizados pelos grandes temas do estudo previamente estabelecidos e estruturados por categorias que emergiram da análise dos dados e, com eles, procurei apresentar, num primeiro nível analítico, as concepções sobre a Matemática e a actividade matemática das professoras e dos matemáticos. No planeamento do meu estudo, tinha previsto um momento em que entregaria a cada participante a descrição do seu caso com o objectivo de obter dele uma eventual reacção ou comentário. Por circunstâncias da minha vida pessoal e profissional, o estudo sofreu diversas interrupções e veio a estender-se por um período de tempo que ultrapassou em muito o que previra. Tais interrupções, e o espaçamento temporal que entre elas muitas vezes se verificou, levaram a que a descrição de cada um dos casos só ficasse concluída muito depois do período de recolha dos dados que lhe deram origem. Nesta situação, não concretizei a entrega planeada. O tempo decorrido levou-me a considerar a existência de riscos significativos de diluição da memória e, por isso, a supor dificuldades em obter a reacção de cada participante, com o sentido e objectivos com que tinha sido prevista.

A observação de aulas foi utilizada como forma de diversificar os dados recolhidos e só foi realizada no caso das professoras. A sua inclusão no estudo dos matemáticos teria permitido a consideração da sua prática como professores na análise das suas concepções. Porém não a previ uma vez que, em relação a práticas de ensino, pretendia investir sobretudo junto das professoras, dado o meu interesse prioritário pelo ensino da Matemática na escolaridade básica e secundária decorrente da minha condição de formador de futuros professores para este nível de escolaridade.

Na investigação sobre o professor e processos de ensino, o estudo da sua prática constitui a meu ver uma componente essencial. Com o processo de observação e análise de aulas que tal estudo envolve, bem como com o acompanhamento de outras vertentes da prática lectiva — a preparação de aulas, por exemplo, ou a interacção entre professores no âmbito dessa preparação ou em outro domínio da sua acção profissional — é possível ter uma percepção directa dos problemas com que o professor se defronta e da forma como actua, bem como aceder, em primeira mão, ao contexto onde essa prática ocorre. Neste processo, contudo, importa 'ouvir' o professor, considerar a prática e o discurso sobre a prática: o que a acção de um sujeito significa só é compreendido considerando o que ele diz sobre o que fez ou vai fazer (Bruner, 1997). Estar-se-á assim mais próximo de poder compreender, do seu interior, a realidade em que o professor se insere e integrar os seus pontos de vista e significados em relação às suas próprias acções.

Uma última consideração ainda de natureza metodológica. Em diversos estudos sobre concepções e práticas dos professores é estudada a relação entre umas e outras, em muitos casos com o propósito de identificar consistências ou contradições entre elas. A prática do professor é considerada como um 'fazer' — a aula observada — eventualmente consistente ou inconsistente com as suas concepções, tidas como manifestadas no seu 'dizer', ou seja, no seu discurso em entrevistas com maior ou menor grau de formalidade. Esta perspectiva pode limitar o pretendido estudo e dificultar o entendimento das próprias práticas e concepções. Eventuais discrepâncias entre o 'fazer' e o 'dizer' do professor podem elas próprias ser sinal, não de inconsistências entre práticas e concepções mas de concepções de importância diferente e conflituantes no professor (Green, 1971, Rokeach, 1976), ou ainda indiciarem a existência de dilemas ou de constrangimentos e limitações que lhe são exteriores.

Relativamente ao tema deste meu estudo, uma das ideias que se me impuseram desde o início foi acrescentar, ao estudo das concepções sobre a Matemática, um estudo mais delimitado e específico, centrado nas concepções sobre a actividade matemática. Pretendia com isto, como veio a acontecer, fazer recair a incidência principal do meu trabalho sobre um tema ainda muito pouco explorado e a que atribuía importância no ensino e aprendizagem da Matemática. Com esta definição temática, surgiu desde logo a ideia de incluir no estudo matemáticos — professores do ensino superior que realizam investigação em Matemática — a par dos professores do ensino básico e secundário desta disciplina. Com os matemáticos, grupo profissional sobre o qual não existiam quaisquer trabalhos de investigação em Portugal, pretendia tirar partido do facto de eles serem sujeitos da actividade matemática criativa que via como potencialmente rico face ao que me propusera investigar. Com os professores de Matemática, queria trabalhar "todas as questões" da investigação, assumindo-os, desde o primeiro momento, como "os participantes principais do estudo" *(carta a João Pedro da Ponte, Abril de 1992)*. Na base desta minha assunção estava o facto de a formação de professores de Matemática do ensino básico e secundário e a didáctica desta disciplina constituírem o núcleo dos meus interesses e preocupações profissionais.

Para além dos professores e dos matemáticos, era minha intenção inicial incluir alunos como participantes no meu estudo. O que então tinha em mente, como na altura explicitei, era obter "elementos relativos à aprendizagem que *acontece*", ou, como também disse, sobre a forma como "encaram as propostas do professor e [sobre] a sua actuação perante elas" *(carta a João Pedro da Ponte, Abril de 1992)*. Pretendia assim recolher um terceiro ponto de vista sobre a Matemática e actividade matemática, desta vez junto dos sujeitos da aprendizagem. Todavia, o desenrolar do trabalho cedo levou à percepção de que a inclusão de alunos não se justificava e de que podia mesmo tornar-se excessiva, face aos objectivos delineados para o estudo dos matemáticos e dos professores e às expectativas que tinha para o seu desenvolvimento. Esta percepção transparece já no relatório que apresentei no final de 1992 sobre o desenvolvimento do meu trabalho onde enuncio o propósito de fazer incidir a investigação "essencialmente sobre as concepções de matemáticos (...) e de professores de Matemática do ensino secundário" *(Relatório de actividades, Novembro de 1992)*. Foi este o 'caminho' que o meu trabalho seguiu, mas queria sublinhar aqui a importância da investigação sobre as concepções dos alunos, em particular a que procura compreender eventuais relações dessas concepções com as concepções dos professores e com as suas práticas de ensino, investigação que está ainda pouco desenvolvida no nosso país, no que se refere à disciplina de Matemática.

A inclusão de matemáticos e de professores do ensino básico e secundário possibilitou o estudo de sujeitos com uma experiência da Matemática muito distinta e o confronto das suas concepções. Relativamente a matemáticos, a investigação que realizei é, no nosso país, um primeiro trabalho, existindo todo um campo por explorar que, por si só, justifica o incremento da investigação nesta área e a sua diversificação, quer ao nível da incidência temática, quer também relativa ao tipo de sujeitos envolvidos, incluindo matemáticos com diferentes perfis académicos e científicos. As concepções dos matemáticos sobre a Matemática são ainda um tema em aberto, como são também os problemas relacionados com o ensino desta disciplina a nível superior onde os matemáticos detêm a principal responsabilidade. Num e noutro caso, a pertinência e relevância do desenvolvimento da investigação torna-se ainda mais evidente se tivermos presente que, em geral, os matemáticos são professores de futuros professores de Matemática, sendo de esperar que influenciem em boa medida as suas concepções sobre esta disciplina, o seu ensino e as práticas irão desenvolver. Para além disso, estudos sobre concepções e práticas no ensino superior poderão contribuir para sustentar e aprofundar a reflexão pedagógica e didáctica neste nível de ensino cuja necessidade é hoje crescentemente sentida (Bireaud, 1995) mas a meu ver ainda pouco praticada.

Referências

Abelson*, Robert (1979). Diferences between beliefs systems and knowledge systems. *Cognitive Science, 3*, 335-366. (*Citado em Nespor, 1997).

Abrantes, Paulo (1986). *Porque se ensina Matemática: perspectivas e concepções de professores e de futuros professores.* Provas de aptidão pedagógoca e de competência científica não publicadas, Universidade de Lisboa.

Ahlfords at al. (1962). On the mathematics curriculum of the high school. *The Mathematics Teacher, 55*(March), 191-194.

Alarcão, Isabel (1991). Reflexão crítica sobre o pensamento de D. Schön e os programas de formação de professores. *Cadernos CIDINE nº1*, 5-22.

APM (Associação de Professores de Matemática) (1998). *Matemática 2001, diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da Matemática.* Lisboa: APM.

Arendt, Hannah (1992). *La vie de l'esprit, 1 — La pensée.* Paris: PUF.

Arendt, Hannah (2000). A crise na educação. Em O. Pombo (org.). *Quatro textos excêntricos* (pp. 21-53). Lisboa: Relógio d'Água.

Artigue, Michéle (1989). *Epistémologie et didactique.* Cahier de DIDIREM nº 3. Paris: Universidade de Paris, IREM.

Azevedo, António Filipe (1993). O computador no ensino da Matemática: uma contribuição para o estudo das concepções e práticas dos professores (tese de mestrado, Universidade Nova de Lisboa). Lisboa: APM.

Bauersfeld, Heinrich (1980). Hidden dimensions in the so-called reality of a mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 11*, 23-41.

Bireaud, Annie (1995). *Os métodos pedagógicos no ensino superior* (tradução de Irene Lima Mendes). Lisboa: Porto Editora.

Blij, F. van der, S. Hilding, e A. I. Weinzweig (1980). A synthesis of national reports on changes in curricula. Em H. G. Steiner (Ed.) *Comparative Studies of Mathematics Curricula — Change and Stability* (pp. 37-54). Osnabrück: Institut für Didaktik der Mathematik.

Boavida, Ana (1993). Resolução de problemas em educação matemática: contributo para uma análise epistemológica e educativa das representações pessoais dos professores (tese de mestrado, Universidade Nova de Lisboa). Lisboa: APM.

Bogdan, Robert C., e Sari Knopp Biklen (1982). *Qualitative research for education: An introductin to theory and methods.* Boston: Allyn and Bacon.

Borel, A. (1983). Mathematics: Art and science. *The Mathematical Inteligencer, 5*(4), 9-17.

Bourbaki, Nicolas (1971). The Architecture of Mathematics. Em F. Le Lionnais (Ed.), *Great Currents of Mathematical Thought* (Vol. 1, pp. 23-36). Nova Iorque: Dover.

Brown, Catherine, e Thomas Cooney (1982). Research on teacher education: A philosophical orientation. *Journal of Research and Development in Education, 15*(4), 13-18.

Brown, Catherine, Stephen Brown, Thomas Cooney, e Douglas Smith (1982). *Episodes.* (Manuscrito não publicado).

Brown, Catherine, Stephen Brown, Thomas Cooney, e Douglas Smith (1982). The pursuit of mathematics teachers' beliefs. Em *Actas do 5th Annual Meeting of PME-NA* (pp. 203-215), Athens, Georgia, EUA.

Bruner, Jerome (1997). *Actos de significado* (tradução de Vanda Prazeres). Lisboa: Edições 70.

Brunschvicg, Léon (1993). L'Intuition chez les Mathémathiciens contemporains. Em L. Brunschvicg, *Les Étapes de la Philosophie Mathématiques* (pp. 443-447). Paris: A. Blanchard.

Burton, Leone (1998). Thinking about mathematical thinking - heterogeneity and its social justice implication. Em P. Gates (Ed.), *Proceedings of 1st International Mathematics Education and Society Conference.* (pp. 17-20). Nottingham: Center for the Study of Mathematics Education.

Burton, Leone (1999). The practices of mathematicians: What do they tell us about coming to know mathematics? *Educational Studies in Mathematics 37*(2), 121-143.

Burton, L. (2001). Research mathematicians as learners — and what mathematics education can learn from them." *British Educational Res.earch Journal 27*(3), 589-599.

Canavarro, Ana Paula (1993). Concepções e práticas de professores de Matemática: três estudos de caso (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Castelnuovo, Emma (1983). Para um ensino da Matemática capaz de produzir cultura científica. Em *Ensino da Matemática anos 80* (pp. 29-41). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Matemática.

Castelnuovo, Emma (1990). *L'Enseignement des Mathématiques: ce qui est invariant dans un monde qui change.* Comunicação apresentada no CIEAEM 42, Szczyrk (Polónia).

Christiansen, B., e G. Walther (1986). Task and activity. Em Bent Christiansen, Albert Geoffrey Howson, e Michael Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Christiansen, Bent (1976). *European mathematics education — The past and present.* Comunicação apresentada na 6th Conference of the Australian Association of Mathematics Teachers, Perth (Austrália).

Ciesielski, Krzysztof, e Zdzislaw Pogoda (1988). Conversation with Andrzej Turowicz. *The Mathematical Intelligencer, 10*(4), 13-20.

Clandinin, D. Jean (1985). Personal practical knowledge: A study of teacher's classroom images. *Curriculum Inquiry, 14*(4), 361-385.

Clandinin, D. Jean (1986). *Classroom pratice, teacher images in action.* Londres: The Falmer Press.

Clandinin, D. Jean, e F. Michael Connelly (1987). Teachers' personal knowledge: what counts as 'personal' in studies of the personal. *Curriculum Inquiry, 19*(6), 487-500.

Clark, Cristopher M., e Penelope L. Peterson (1986). Teachers' thought process. Em M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of Research in Education* (3ª edição ed., pp. 255-296). Nova Iorque: MacMillan.

Connelly, F. Michael, e D. Jean Clandinin (1986). On narrative method, personal philosophy, and narrative unities in the story of teaching. *Journal of Research in Science Teaching, 23*(4), 293-310.

Cooney, Thomas (1983). *Espoused beliefs and beliefs in pratice: The cases of Fred and Janice.* Comunicação apresentada no 5th Annual Meeting of PME, Montreal.

Cooney, Thomas (1985). A beginning teacher's view of problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education, 16*(5), 324-336.

Costa, Cristolinda (1984). *Prospective primary teachers' understanding about area* (tese de mestrado não publicada, Universidade de Boston, Boston).

Costa, Fátima (1984). *An assessement of a mathematics curriculum and of the curricular needs of Portuguese teachers* (tese de mestrado não publicada, Universidade de Boston, Boston).

Crosswhite, F. Joe, John A. Dossey, e Shirley M. Frey (1989). NCTM Standards for school mathematics: Visions for implementation. *Mathematics Teacher, 82*, 664-671.

Cunha, Celso, e Lindley Cintra (1986). *Nova gramática do português contemporâneo.* Lisboa: Edições João Sá da Costa.

Damásio, António (1995). *O erro de Descartes* (tradução de Dora Vicente e Georgina Segurado). Lisboa: Bertrand.

Davis, Philip, e Reuben Hersh (1981). *The mathematical experience.* Boston: Birkhäuser.

Davis, Robert B. (1970). The Madison Project's aproach to a theory of instruction. Em H. Fehr A. Revuz, M. Clayman, A. Krygowska, H. Steiner, J. Surány, D. Wheeler (Ed.), *New trends in mathematics teaching* (Vol. II, pp. 25-57). Paris: UNESCO.

DEB, Ministério da Educação (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico — Competências essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação.

DES, Ministério da Educação (1997). *Matemática - Programas 10º, 11º e 12º anos*. Lisboa: Ministério da Educação.

Dewey, John (1991). *How we think*. Nova Iorque: Prometheus Books.

Dieudonné, Jean (1961). Pour une conception nouvelle de l'enseignment des mathématiques. Em Howard Fehr* (Ed.), *Mathématiques Nouvelles*. (pp. 31-47). Paris: OECE. (*Responsável pela elaboração do livro citado, coadjuvado por Luke Bunt, que constituiu o relatório do seminário de Royamont).

Dieudonné, Jean (1973). Should we Teach "Modern" Mathematics? *The American Scientist, 61*(January-February), 16-19.

Dieudonné*, Jean (1982). Mathématiques vides et mathématiques significatives. Em R. Apéry, M. Caveing, e J. J. Dionne (Eds.), *Penser les Mathématiques* (pp. 15-38). Paris: Ed. du Seuil. (*Citado em Mura, 1993).

Dieudonné, Jean (1990a). Matemáticas e matemáticos, *A formação da Matemática contemporânea* (tradução de J. H. von Hafe Perez) (pp. 19-30). Lisboa: D. Quixote.

Dieudonné, Jean (1990b). A natureza dos problemas das matemáticas, *A formação da Matemática contemporânea* (tradução de J. H. von Hafe Perez). (pp. 31-41). Lisboa: D. Quixote.

Dreyfus, Tommy, e Theodore Eisenberg (1986). On the aesthetics of mathematical thought. *For the Learning of Mathematics, 6*(1), 2-10.

Elbaz, Freema (1983). Teacher thinking, a study of practical knowledge. Londres: Croom Helm.

Erickson, Frederick (1986). Qualitative methods in research on teaching. Em M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 119-161). Nova Iorque: MacMillan.

Ernest*, Paul (1988). *The impact of beliefs on the teachers' beliefs on the teaching of mathematics.*

Ernest, Paul (1989). *The mathematics related belief systems of student primary school teachers.* Texto divulgado no 13th Annual Meeting of PME.

Evertson, Carolyn M., e Judith L. Green (1986). Observation as inquiry and method. Em M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching.* (pp. 162-213). Nova Iorque: Macmillan.

Fang, Joong (1970). Process of mathematical creation, *Nicolas Bourbaki.* (Vol. I, pp. 109-139). Nova Iorque: Paideia.

Feiman-Nemser, Sharon, e Floden, Robert E. (1986). The cultures of teaching. Em M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of Research in Education.* (3ª edição ed., pp. 505-525). Nova Iorque: MacMillan.

Fennema, Elizabeth, e Franke, Megan Loef (1992). Teacher' knowledge and its impact. Em Douglas A. Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 147-164). Nova Iorque: MacMillan.

Fenstermacher*, G. D. (1978). A philosophical consideration of recent research on teacher effectiveness. *Review of Research in Education, 6,* 157-185. (*Citado em Thompson, 1982).

Fenstermacher, Gary (1994). The knower and the known: the nature of knowledge in research on teaching. *Review of Research in Education* (20), 3-56.

Fernandes, Domingos (1984). *A mathematics needs assessement study of the elementary school teachers of Viana do Castelo* (tese de mestrado não publicada, Universidade de Boston, Boston).

Fey, James T. (1978). Change in mathematics education since the late 1950's — Ideas and realization in USA. *Educational Studies in Mathematics, 9,* 339-353.

Flato, Moshé (1990). *Le pouvouir des mathématiques.* Paris: Hachete.

Fonseca, Lina (1995). *Três futuros professores perante a resolução de problemas: concepções e processos utilizados* (tese de mestrado, Universidade do Minho). Lisboa: APM.

Fontaine, P. (1998). Croyance. *Encyclopédie Philosophique* (Vol II) *Les notions philosophiques* (pp. 522-524). Paris: PUF

Frey, Shirley M. (1989). The NCTM Standards - chalenges for all classrooms. *Mathematics Teacher*, 312-317.

Furinghetti, Fulvia (1992). *Images of Mathematics outside the community of mathematiciais*. Images of Mathematics outside the community of mathematiciais, Québèc - Canadá.

Green*, T. E. (1971). *The activities of teaching*. NY: MCGraw-Hill. (*Citado em Thompson, 1982).

Griffiths, H. B., e A. G. Howson (1974). *Mathematics: Society and curricula* (cap. 12). Londres: Cambridge University Press.

Grigutsch, Stefan, e Günter Törner (1998). World views of mathematics held by university teachers of mathematics science. (Manuscrito não publicado).

Grows, D. A. (Ed.). (1992). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Nova Iorque: MacMillan.

GTI (Grupo de Trabalho de Investigação) (2002). *Reflectir e investigar sobre a prática profissional*. Lisboa: APM.

Guimarães, Fátima (1999). O conteúdo do conhecimento profissional de duas professoras de Matemática. *Quadrante*, *8*, 5-32.

Guimarães, Henrique Manuel (1988). *Ensinar Matemática: concepções e práticas* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Guimarães, Maria Fátima (1996). *O conhecimento profissional do professor de Matemática: dois estudos de caso* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM

Hadamard, Jacques (1954). *The psycology of invention in the mathematical field* (a data é a da primeira reimpressão da obra de 1949 e não consta outra posterior). Nova Iorque: Dover.

Halmos, Paul R. (1980). The heart of mathematics. *American Mathematical Monthly*(87), 519-524.

Hardy, G. H. (1988). A mathematician's apology. Em J. R. Newman (Ed.), *The world of mathematics* (Vol. 4, pp. 2003-2014). Redmond: Tempus Books.

Hartmann, Nicolaï (1945). *Les principes d'une métaphisique de la connaissance* (Vol. Tomo I, cap. V). Paris: Aubier, Éditions Montaigne.

Hilbert, David (1990). Prefácio de, *Geometry and the imagination* (pp. iii-v). Nova Iorque: Chelsea Publishing Company.

Hooten, Joe R. (1981). Algumas inferências da história do ensino da Matemática nos E.U.A 1960-80. Em Actas das VIII Jornadas Luso Espanholas de Matemática, Vol. IV. Coimbra: Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Howson, Albert Geoffrey (1984). Seventy five years of the International Commission on Mathematics Instruction. *Educational Studies in Mathematics, 15*(1), 75-93.

Howson, Albert Geoffrey, Christine Keitel, e Jeremy Kilpatrick (1981). *Curriculum development in mathematics (cap. 6).* Cambridge: Cambridge University Press.

Johnson, Mark (1984). Review of Teacher Thinking: A Study of Practical Knowledge, by Freema Elbaz. Curriculum Inquiry, 14(4), 465-468.

Jones, Doug (1988). *A review of selected research related to the relevance of mathematics teachers' beliefs to teacher education and instructional pratice.* (Manuscrito não publicado).

Keitel, Christine (1982). Mathematical education and research in USA and USSR: Two comparisons compared. *International Journal of Curriculum Studies, 14*(2), 109-126.

Kesler, Reuben (1985). *Teachers' instructional behaviour related to their conceptions of teaching and mathematics and their level of dogmatism: Four case studies* (tese de doutoramento não publicada, Universidade da Geórgia, Athens).

Kilpatrick, Jeremy (1997). Confronting reform. *American Mathematical Monthly, 104* (Dezembro), 955-962.

Kitcher, Philip (1986a). Mathematical change and scientific change. Em Philip Kitcher *The nature of mathematical knowledge* (pp. 149-177). Nova Iorque: Oxford University Press.

Kitcher, Philip (1986b). Mathematical changes. Em Philip Kitcher *The nature of mathematical knowledge* (pp. 178-192). Nova Iorque: Oxford University Press.

Kline, Morris (1970). Logic versus pedagogy. *American Mathematical Monthly*, *77* (March), 265-285.

Kline, Morris (1976). *O fracasso de Matemática Moderna* (tradução de Leonidas Gontijo de Carvalho). São Paulo: Ibrasa.

Lakatos, Imre (1990). A renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics. Em J. Worral e G. Currie (Eds.), *Mathematics, science and epistemology* (pp. 24-42). Nova Iorque: Cambridge University Press.

Lakatos, Imre (1990). A renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics. Em J. Worral e G. Currie (Eds.), *Mathematics, science and epistemology* (pp. 24-42). Nova Iorque: Cambridge University Press.

Lakatos, Imre (1993). *Proof and refutations: The logic of mathematical discovery*. Nova Iorque: Cambridge University Press.

Lallande, A. (1976). *Vocabullaire tecnique et critique de Philosophie.* Paris: PUF.

Lessard-Hébert, Michelle, Gabriel Goyette, e Gérard Boutin (1994). *Investigação qualitativa: fundamentos e práticas* (tradução de Maria João Reis). Lisboa: Instituto Piaget.

Lewis*, H. (1990). *A question of values.* San Francisco: Harper & Row. (*Citado em Pajares, 1992).

Lichnerowicz, André (1980). Notas sobre as matemáticas e a realidade. Em Jean Piaget (Ed.), *Lógica e conhecimento científico* (Vol. 1, pp. 393-401) (tradução de Sousa Dias). Porto: Livraria Civilização.

Llinares, Salvador (1988). *Las creencias sobre la naturaleza de las matemáticas y su enseñanza en estudiantes para professores de primaria: dos estudios de caso* (tese de Doutoramento não publicada, Universidade de Sevilha, Sevilha).

Loureiro, Maria Cristina (1992). Calculadoras na Educação Matemática: uma experiência na formação de professores. *Quadrante, 1*(1), 7-25.

Ludke e André (1986). *Pesquisa em educação*. São Paulo: E.P.U.

Machado, José Pedro (1995b). *Dicionário etimológico da língua portuguesa.* (Vol. IV). Lisboa: Livros Horizonte.

Magnier, André (1980). *Changes in secondary school mathematics education in France over the last thirty years.* Em H. G. Steiner (Ed.) *Comparative Studies of Mathematics Curricula — Change and Stability* (pp. 123-166). Osnabrück: Institut für Didaktik der Mathematik.

Marcelo, Carlos (1987). *A study of implicit theories and beliefs about teaching in elementary school teachers.* Comunicação apresentada no Annual meeting of the American Educational Research Association

Martins, Maria Paz (1996). *A avaliação das aprendizagens em Matemática: concepções dos professores* (tese de mestrado, Universidade Católica de Lisboa). Lisboa: APM.

Matos, José Manuel (1988). Cronologia recente do ensino da Matemática. Lisboa: APM.

Matos, José Manuel (1994). *Van Hiele levels of preservice primary teachers in Portugal* (tese de mestrado não publicada, Universidade de Boston, Boston).

Matos, José Manuel (1995). *Algumas linhas de força da investigação em educação matemática em Portugal.* Comunicação apresentada no V Seminário de Investigação em Educação Matemática, Leiria.

Matos, J. M. (1995). Algumas linhas de força da investigação em educação matemática em Portugal. Em A. P. Mourão, I. Rocha, J. A. Fernandes, J. Fernandes e L. S. Almeida (Ed.), *Actas do V Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 5-16). Leiria: APM.

McCracken, Grant (1988). *The long interview.* Beverly Hills: Sage.

Meneses, Luís (1995). *Concepções e práticas de professores de Matemática: contributos para o estudo da pergunta* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Merrian, Sharan B. (1988). *Case study research in education.* S. Francisco: Jossey-Bass Publishers.

Miles, Matthew B., e A. Michael Huberman (1984). Drawing valid meaning from qualitative data: Toward a shared craft. *Educational Researcher, 13*(3), 20-30.

Monteiro, Maria Cecília (1984). *An assessement of mathematics needs and interests of grades 5 and 6 mathematics teachers of Lisbon* (tese de mestrado não publicada, Universidade de Boston, Boston).

Moon, Bob (1986). *The New Maths' curriculum controversy: An international story.* Londres: The Falmer Press.

Munby, H., e T. Russel (1992). Frames of reflection: an introdution. Em T. Russel & H. Munby (Ed.), *Teacher and teaching: from classroom to reflection* (pp. 1-8). Londres: The Falmer Press.

Munby, Hugh (1984). A qualitative approach to the study of a teacher's beliefs. *Journal of Research in Science Teaching, 12*(1), 27-38.

Mura, Robert (1993). Images of mathematics held by university teachers of mathematical sciences. *Educational Studies in Mathematics, 25*(4), 375-385.

NACOME (National Commitee for Mathematics Education) (1975). *Overview and analysis of school mathematics grades K*-12 (cap. 1 e cap. 6). Reston, VA: NCTM.

NCSM (National Council of Supervisors of Mathematics) (1978). Position statements on basic skills. *Mathematics Teacher, 71* (February), 147-152.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (1980). *An agenda for action: Recommendations for school mathematics for the 1980s.* Reston: NCTM.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (1985). *Agenda para a acção: recomendações para o ensino da Matemática nos anos 1980* (tradução de José Manuel Matos e Lurdes Serrazina). Lisboa: APM.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (1991a). *Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar* (tradução de E. Veloso,

F. Nunes, H. Guimarães, J. F. Matos, J. M. Duarte, L. Leal, L. Moreira, L. Serrazina e R. Carvalho). Lisboa: APM/IIE.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (1991b). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston VA: NCTM.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática* (tradução de A. P. Canavarro, L. Moreira, L. C. Leal, M. J. Veloso, M. M. Graça). Lisboa: APM/IIE.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (1995). *Assessement standards for school mathematics*. Reston VA: NCTM.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (1999). *Normas para a avaliação em Matemática escolar* (tradução de A. P. Canavarro, L. Santos e P. Marques). Lisboa: APM.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston VA: NCTM.

Neisser*, U. (1976). *Cognition and reality*. San Francisco: Freeman. (*Citado em Thompson, 1982).

Nespor, J. (1987). The role of beliefs in pratice of teaching. *Journal of Curriculum Studies*, *19*, 317-328.

Neumann, John von (1988). The mathematician. Em J.R. Newman (Ed.), *The World of Mathematics* (Vol. 4, pp. 2029-2039). Redmond: T. Books.

Newman, J. R. (1988). Commentary on Hermann Weyl. Em J. R. Newman (Ed.), *The world of mathematics* (Vol. 3, pp. 1803-1804). Redmond: Tempus Books.

Nisbet, R., e L. Ross* (1980). *Human inference: Strategies and shortcomings of social judgements*. Englewood Clifts, NJ: Prentice Hall. (*Citado em Pajares, 1992).

NRC (National Research Council) (1989). *Everybody Counts*. Washington: National Academic Press.

NRC (National Research Council) (1990). *Reshaping School Mathematics*. Washington: National Academy Press.

OECE (Organização Europeia para a Cooperação Económica) (1961a). *Mathématiques Nouvelles*. Paris: OECE.

OECE (Organização Europeia para a Cooperação Económica) (1961b). *Un programme moderne de mathématiques pour l'enseignment secondaire*. Paris: OECE.

Oliveira, Augusto Franco de (1991). *Lógica e Aritmética*. Lisboa: APM/Gradiva.

Oliveira, Hélia Margarida, e João Pedro da Ponte (1996). *Investigação sobre concepções saberes e desenvolvimento profissional de professores de Matemática*. A. C. Silva e I. Oliveira (Ed.), *Actas do VII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 323). Lisboa: APM

Oliveira, Maria José Delgado (1993). Os professores de Matemática e a resolução de problemas: três estudos de caso (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Owens, John Edwin (1987). *A study of four preservice mathematics teachers' constructs of mathematics and mathematics teaching* (tese de doutoramento não publicada, Universidade da Geórgia, Athens).

Pajares, M. Frank (1992). Teachers' beliefs and educational research: cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research*, *62*(3), 307-332.

Papert, Seymour (1985). *Logo: computadores e educação*. São Paulo: Editora Brasiliense.

Papy, F. (1970). L'Expérience belge à l'école primaire. Em H. Fehr A. Revuz, M. Clayman, A. Krygowska, H. Steiner, J. Surány e D. Wheeler (Ed.), *New trends in mathematics teaching* (Vol. II, pp. 95-111). Paris: UNESCO.

Perez, Angel (1992). O pensamento prático do professor: a formação do professor como profissional reflexivo. Em António Nóvoa (Ed.), *Os professores e a sua formação* (pp. 94-114). Lisboa: D. Quixote.

Peterson, Penelope, Elizabeth Fennema, Thomas Carpenter, e Megan Loef (1989). Teachers' pedagogical content beliefs in mathematics. *Cognition and Instruction* *6*(1), 1-40.

Piaget, Jean (1965). Les structures mathématiques et les structures opératoires de l'intelligence. Em C. Cattegno et al. (Ed.), *L'Enseignement des Mathématiques: nouvelles perspectives* (pp. 11-33). Neuchatel: Delachaux et Niestlé.

Poincaré, Henri (1908). L'invention matemátique. *L'Enseignement Mathématique*, *10*, 357-371.

Poincaré, Henri (1948). L'Intuition e la Logique em Mathématiques, *La Valeur de la Science* (pp. 11-34). Paris: Flammarion.

Poincaré, Henri (1970). Sobre a natureza do raciocínio matemático, *Ciência e hipótese* (tradução de Lopes Penha) (pp. 21-36). Lisboa: Galeria Panorama.

Poincaré, Henri (1988). A intuição e lógica em Matemática, *Cadernos de Educação e Matemática — A natureza da Matemática* (pp. 7-16, tradução de Henrique M. Guimarães). Lisboa: APM.

Pólya, George (1990). *Mathematics and plausible reasoning* (Vol. I - Induction and analogy in mathematics). Princeton: Princeton University Press.

Pollak*, Henry (1987). *Notes from a talk given at the Mathematical Sciences Education Board.* Comunicação na *Frameworks Conference*, Maio de 1987, Minneapolis. (*Citado em NCTM, 1991).

Pombo, Olga (2002). *A Escola, a recta e o círculo.* Lisboa: Relógio d' Água.

Pombo, Olga (2002b). Comunicação e construção do conhecimento. Em O. Pombo *A Escola, a recta e o círculo* (pp. 182-227). Lisboa: Relógio d' Água.

Ponte, João Pedro da (1993). *Professores de Matemática: das concepções aos saberes profissionais.* Comunicação apresentada no SIEM IV, Ponta Delgada, Açores.

Ponte, João Pedro da (1994). *Mathematics teachers' professional knowledge.* J. P. da Ponte e J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of PME XVIII* (Vol. I), (pp. 195-210), Universidade de Lisboa: Lisboa.

Ponte, João Pedro da (1994b). O professor de Matemática: um balanço de dez anos de investigação. *Quadrante*, *3*(2), 79-114.

Ponte, João Pedro da, José Manuel Matos, e Paulo Abrantes (1998). *Investigação em educação matemática — implicações curriculares* (Cap. IV — O professor de Matemática). Lisboa: IIE.

Powney, Janet, e Mike Watts (1987). *Interviewing in educational research.* Londres: Routledge e Kegan Paul.

Ribeiro, António (1995). Concepções de professores do 1º ciclo: a Matemática, o seu ensino e os materiais didácticos (tese de mestrado não publicada, Universidade de Lisboa, Lisboa).

Rodrigues, Elizabete Fonseca (1993). *Perspectivas dos professores sobre o ensino da Matemática* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Rokeach*, Milton (1960). The organization of belief-disbelief systems. Em M. Rokeach (Ed.), *The open and closed mind.* Nova Iorque: Basic Books. (*Citado em Thompson, 1982).

Rokeach, Milton (1976). *Beliefs, attitudes and values: A theory of organization and change.* San Francisco: Jossey Bass.

Scheffler*, I. (1965). *Conditions of knowledge: An introduction to epistemology and education.* Chicago: Scott Foresman. (*Citado em Thompson, 1982).

Schoenfeld, Alan H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in mathematics. Em D. A. Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). Nova Iorque: Macmillan Publishing Company.

Schoenfeld, Alan H. (1983). Beyond the purely cognitive: Belief systems, social cognitions, and metacognitions as driving forces in intelectual performance. *Cognitive Science*, *7*, 239-363.

Schön, Donald (1992). The theory of inquiry: Dewey's legacy to education. *Curriculum Inquiry* 22(2), pp. 119-139.

Schön, Donald (1991). *The reflective practitioner: how professionals think in action.* Londres: Avebury.

Schön, Donald (1992). Formar professores como profissionais reflexivos. Em António Nóvoa (Ed.), *Os professores e a sua formação* (pp. 79-91). Lisboa: D. Quixote.

Serrazina, Lurdes (1999). Reflexão, conhecimento e práticas lectivas em Matemática num contexto de reforma curricular no 1° ciclo. *Quadrante, 8*, 139-167.

Servais, Willy (1975). Continental traditions and reforms. *International Journ. of Mathematical Education in Science and Technology, 6*(1), 37-58.

Shulman, Lee (1986). Those who understand. *Educational Researcher, 15*(7), 4-14.

Silva, José Sebastião e (1953). *O que é uma axiomática?* (Vol. - separata da Gazeta de Matemática n° 54). Lisboa: Livraria Sá da Costa (depositário).

Soares, Rui (1984). *The sentiment of Portuguese preparatory and secondary teachers toward the use of calculators in mathematics teaching* (tese de mestrado não publicada, Universidade de Boston, Boston).

Steen, L. Arthur (1988). The science of patterns. *Science, 240* (April), 611-616.

Stone, Marshall H. (1961). La Réforme des Études de Mathématiques. Em Howard Fehr* (Ed.), *Mathématiques Nouvelles.* (pp. 14-30). Paris: OECE. (*Responsável pela elaboração do livro citado, coadjuvado por Luke Bunt, que constituiu o relatório do seminário de Royamont).

Thom, René (1970). Les Mathématiques 'Modernes': Une erreur pédagogique et philosophique? *L'Age de la Science* (3), 225-236. (Republicado em 1971 no *American Scientist, 59*, pp. 695-699).

Thom, René (1971). "Modern Mathematics": An educational and philosophic error? *The American Scientist, 59* (Nov-Dec), 695-699. (Anteriormente publicado, em 1970, no *L'Age de la Science*, pp. 225-239).

Thom, René (1973). Modern Mathematics: does it exist? Em Albert Geoffrey Howson (Ed.), *Developments in Mathematics Education* (pp. 194-209). Cambridge: Cambridge University Press.

Thompson, Alba (1982). *Teachers' conceptions of mathematics and mahematics teaching: three case studies* (tese de doutoramento não publicada, Universidade da Geórgia, Athens).

Thompson, Alba (1992). Teachers' beliefs and conceptions: a syntesis of the research. Em D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 127-146). Nova Iorque: MacMillan.

Tucker, Albert W. (1961). Les aplications des mathématiques. Em Howard Fehr* (Ed.), *Mathématiques Nouvelles* (pp. 50-62). Paris: OECE. (*Responsável pela elaboração do livro citado, coadjuvado por Luke Bunt, que constituiu o relatório do seminário de Royamont).

Usiskin, Zalman (1985). We need another revolution in secondary school mathematics. Em Christin R. Hirsh e Marilyn J. Zweng (Eds.), *The secondary school mathematics curriculum* (pp. 1-21). Reston: NCTM.

Vale, Isabel (1993). *Concepções e práticas de jovens professores perante a resolução de problemas de matemática: um estudo longitudinal de dois casos* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Vogeli, Bruce R. (1976). *The rise and fall of the "New Math"*. Nova Iorque: Teachers College, Columbia University.

Wang, Hao (1986). Theory and pratice in mathematics. Em Tymoczco (Ed.), *New directions in the philosophy of mathematics* (pp. 129-152). Boston: Birkhäuser.

Weyl, Hermann (1988). The mathematical way of thinking. Em J. Newman (Ed.), *The world of mathematics* (Vol. 3, pp. 1805-1821). Redmond: Tempus Books.

Wittrock, M. C. (Ed.). (1986). *Handbook of Research on Teaching*. Nova Iorque: MacMillan.

Wu, H. (1997). The mathematics education reform: Why you should be concerned and what can you do. *Americam Mathematical Monthly, 104*(Dezembro), 946-954.

Yin, Robert K. (1984). *Case study research: Design and methods*. Newbury Park: Sage.

Anexos

Anexo 1 — Guião das entrevistas longas aos matemáticos

(Percurso escolar e profissional)

• Como chegou à profissão de matemático?

• Porque escolheu a Matemática? O que viu (vê) na Matemática que o terá levado a essa escolha?

• Que experiência teve da Matemática enquanto aluno? Que lembranças guarda desse período?

• Teve sempre o mesmo tipo de relação com a Matemática? Se não, o que provocou a mudança?

• Sente ter havido diferenças significativas no ensino secundário e no ensino superior? Em que aspectos?

• O que o motiva mais na sua profissão, e, em particular, no seu trabalho como investigador? Que contrapartidas ou compensações retira da sua profissão e do trabalho que realiza em Matemática?

(A Matemática e a actividade matemática)

- Em que área da Matemática trabalha? O que levou a escolher essa área? No seu trabalho de matemático que tipo de problemas lhe interessam?
- Pode dar uma ideia do que consiste o seu trabalho enquanto matemático? Qual a sua principal fonte de inspiração? O que o leva a escolher este ou aquele problema para investigar? Como procede? Que critérios de sucesso?
- No processo de produção de conhecimento, de onde provêm os conhecimentos matemáticos? Que relação têm com a realidade? Qual o papel da experiência? Que lugar e que importância para a intuição e para a lógica no processo de criação matemática?
- Acha que se pode afirmar que em Matemática se atingiu o "rigor absoluto"? Que, uma vez demonstradas, as verdades matemáticas são eternas? Como se situa perante a demonstração do teorema das 4 cores?
- No seu trabalho investigativo, perante um conhecimento novo, sente que está a inventar ou a descobrir Matemática?
- Como situa esses momentos de criação no conjunto do trabalho que realiza? Em que consistem os momentos de trabalho não criativo? Que papel lhes atribui?
- Considera que há diferenças entre os matemáticos no modo como investigam em Matemática? A que nível se situam essas diferenças? Em que se manifestam?
- Que relações os matemáticos estabelecem no âmbito do seu trabalho de investigação? Que papel têm estas relações?
- Em sua opinião o trabalho e o modo de trabalhar dos matemáticos de hoje é diferente dos do passado? Em que se manifestam essas diferenças (ou semelhanças)?
- Acha que há uma Matemática ou várias Matemáticas? Ao longo do seu desenvolvimento houve algo que mudasse significativamente na Matemática? E no modo de fazer Matemática? Que papel para as novas tecnologias?
- No conjunto da enorme produção matemática actual, como distingir a "Matemática boa"?

- Como se situa perante o binómio Matemática Pura-Matemática Aplicada?
- Como explica a enorme aplicabilidade da Matemática?
- Muitos matemáticos reclamam para a Matemática um estatuto de Arte e de Ciência? Quer comentar?
- Como situa a Matemática face às outras ciências? Em que se distingue? Que aspectos tem em comum com elas?
- Há aspectos comuns entre o trabalho de investigação em Matemática e nas outras ciências? Quais os aspectos principais que distinguem a investigação matemática da investigação científica em geral?
- Em sua opinião, o que é fazer Matemática? Que elementos podem caracterizar uma actividade como actividade matemática?
- Do seu ponto de vista, o que faz de um matemático um bom matemático?
- Que conselhos daria a um aluno que pretendesse vir a ser um Matemático?
- Que papel ou importância têm a sua actividade como investigador na sua actividade de professor (e vice-versa)? Quando se considera satisfeito nas suas aulas?
- Na aprendizagem da Matemática, até que ponto o aluno pode (deve?) ser visto como um matemático? E um professor?
- O que é para si um bom aluno em Matemática? O que é, para si, saber Matemática?
- São reconhecidas as dificuldades que muitos alunos têm Matemática. Que origem vê para essas dificuldades?
- Na opinião dos professores universitários muitas vezes os alunos vêm mal preparados do ensino secundário. Quais são os seus principais pontos fracos?
- Em que aspectos considera estar mal o ensino da Matemática nas nossas escolas? O que acha que deveria ser feito para inverter a situação? Acha que também na universidade algo deveria mudar?

Guião simplificado

- **Profissão,** como chegou? **Matemática,** porque escolheu?
- ***Aluno, Matemática,*** *que experiência, lembranças, relação, diferenças sec.-univ.?*
- **Profissão, investigação,** que contrapartidas ou compensações?
- ***Área de trabalho,*** *porque escolheu, que problemas lhe interessam?*
- **Em que consiste o seu trabalho de investigação,** fonte de inspiração? como escolhe problemas? como procede, que critérios de sucesso?
- ***Matemáticos,*** *que diferenças, que relações, passado-presente?*
- **Inventar-descobrir. Momentos de criação e não criação,** que lugar e papel?
- ***Origem dos conhecimentos,*** *Mat-realidade, papel experiência, intuição-lógica ?*
- **"Rigor absoluto",** verdades eternas, teorema das 4 cores?
- ***Uma-várias Matemáticas?*** *Que mudanças, e as novas tecnologias?* ***"Matemática boa",*** *como decidir?*
- **Mat. Pura-Aplicada,** como explica a enorme aplicabilidade ? **Arte e de Ciência?**
- ***Matemática - ciências,*** *diferenças, semelhanças? E no trabalho investigativo?*
- **Fazer Matemática?** Que elementos p/ caracterizar a actividade matemática?
- ***Bom matemático,*** *o que é?*
- **Que conselhos a um aluno?**
- ***Investigação-docência,*** *que relação, que papel e importância?*
- **Quando se considera** satisfeito **nas suas aulas?**
- ***Aluno matemático? Bom aluno em Matemática,*** *o que é?* ***E saber Matemática?***
- **Dificuldades dos alunos,** que origem? Alunos mal preparados, pontos fracos?
- Ensino secundário, o que está mal, que fazer? E na universidade ?

Anexo 2 — Episódios apresentados aos matemáticos

Episódio 1[1]

"As ciências experimentais fazem-se nos laboratórios onde equipas cada vez mais numerosas são necessárias para manipular os instrumentos e descodificar os resultados. Para fazer investigação matemática são apenas necessários uma folha de papel e uma boa biblioteca. O trabalho em equipa, tal como é praticado nas ciências experimentais, é, pois, bastante raro em Matemática, tendo a maior parte dos matemáticos dificuldade em reflectir seriamente salvo no silêncio e na solidão."

(Dieudonné, 1990a, p. 24)[2]

Episódio 2

"Se um problema de xadrez é, em sentido grosseiro, 'inútil', então, tal é igualmente verdade para a maior parte da melhor Matemática (...). Apenas uma pequena parte da Matemática tem utilidade prática e essa parte é relativamente desinteressante."

(Hardy, 1988, p. 2005)

Episódio 3

"Um matemático, como um pintor ou um poeta, é um criador de modelos" (maker of patterns). Se os seus modelos são mais permanentes do que os do pintor ou do poeta, é porque são feitos de ideias. (...) Os modelos que o matemático cria, como os do pintor e os do poeta, devem ser belos; as ideias, como as cores ou as palavras devem ajustar-se harmoniosamente. A Beleza é o primeiro teste: não há lugar permanente no mundo para a Matemática feia."

(Hardy, 1988, p. 2003)

[1] Cada um dos episódios foi apresentado separadamente numa ficha A5.

[2] A referências das citações dos episódios não constavam no texto usado nas entrevistas.

Episódio 4

"O facto mais vitalmente característico da Matemática é, em minha opinião, a sua relação muito especial com as ciências naturais (...). Muitas pessoas, matemáticos ou não, concordarão que a Matemática não é uma ciência empírica, ou, pelo menos, é praticada de uma maneira que difere das outras ciências em diversos aspectos decisivos. No entanto, o seu desenvolvimento está muito proximamente relacionado com as ciências naturais. (...) É inegável que muitas das melhores inspirações em Matemática — em partes consideradas como da Matemática mais pura que possamos imaginar — vieram das ciências naturais."

(Neuman, 1988, pp. 2029-30)

Episódio 5

"A evolução actual da investigação condena à esterilidade, num prazo mais ou menos longo, os matemáticos que acreditam poder fechar-se no domínio supostamente isolado da Matemática pura, sem se preocuparem com o que se passa na Física e nas outras ciências."

(Flato, 1990, p. 67)

Episódio 6

"De que é que a Matemática consiste verdadeiramente? Axiomas (...)? Teoremas (...)? Demonstrações (...)? Definições (...)? Teorias (...)? Fórmulas (...)? Métodos (...)? A Matemática certamente não existiria sem estes ingredientes. Todos eles são essenciais. É apesar de tudo sustentável um ponto de vista para o qual nenhum desses ingredientes está no coração da Matemática, para o qual, a principal razão de existir de um matemático é resolver problemas e que, por isso, aquilo de que verdadeiramente a Matemática consiste, é de problemas e das suas soluções."

(Halmos, 1980, p. 519)

Anexo 3 — Guião das entrevistas longas às professoras

(Percurso escolar e profissional)

- Como chegou à profissão de professor?
- Lembra-se de algum aspecto particularmente significativo da sua vida como professora?
- Sente que mudou alguma coisa desde os primeiros anos até hoje?
- Que importância teve para si a formação educacional? E o estágio?
- O que a motiva mais na sua profissão? Que contrapartidas ou compensações retira da sua profissão?
- Considera-se profissionalmente realizada? Que planos profissionais tem?

(A Matemática e a actividade matemática)

- Porque escolheu a Matemática? O que viu (vê) na Matemática que a terá levado a essa escolha?
- Que experiência teve da Matemática enquanto aluno? Que lembranças guarda desse período? Recorda algum momento ou episódio mais marcante? Lembra-se mais especialmente de algum professor?
- Teve sempre o mesmo tipo de relação com a Matemática? Se não, o que provocou a mudança?
- Sente ter havido diferenças significativas no ensino secundário e no ensino superior? Em que aspectos?
- Acha que um professor de Matemática pode ser visto como um matemático? Porquê?
- Como é a sua vivência actual da Matemática? Até que ponto (e em que momentos) acha que está envolvido em actividades matemáticas?
- Frequentaria actualmente cadeiras de natureza científica de um curso de Matemática numa faculdade?

- Em sua opinião, o que é fazer Matemática?
- Que elementos podem caracterizar uma actividade como actividade matemática? Que actividades considera como matemáticas?
- Como situa a Matemática face às outras ciências? Em que se distingue? Que aspectos tem em comum com elas?
- O que é para si a Matemática? Que palavras utilizaria para descrever a Matemática?
- O que é que lhe dá mais gosto fazer nas aulas? Quando é que, no fim de uma aula se sente satisfeito?
- O que lhe indica que uma aula foi bem sucedida?
- Que tipo de dificuldades encontra mais frequentemente nas aulas?
- Quando tem que introduzir um assunto novo como procede habitualmente?
- Que actividades propõe habitualmente aos alunos? Usa livro de texto? Que papel lhe atribui e como o utiliza?
- Há quem diga que não é possível propor actividades criativas no ensino da Matemática, concorda?
- Na aprendizagem da Matemática, até que ponto o aluno pode (deve?) ser visto como um matemático?
- Em que situações é que acha que um aluno está realmente a fazer Matemática?
- Recorda-se de algo que tenha sucedido numa aula de Matemática sua, da parte de um aluno (alguma resposta, comentário a uma afirmação sua, resolução de alguma tarefa...), e que a tenha surpreendido significativamente? Porque acha que isso aconteceu? Porque se surpreendeu?
- São reconhecidas as dificuldades que muitos alunos têm em Matemática. De que tipo são as dificuldades que mais frequentemente encontra nos alunos? Que origem vê para essas dificuldades?
- Do seu ponto de vista, como é que os alunos vêem a Matemática? Acha que têm razão para isso?
- Há quem diga que há alunos com mais jeito para Matemática do que outros. É desta opinião?

- Quando é que diz que um aluno tem jeito para a Matemática?
- O que é para si um bom aluno em Matemática? O que é, para si, saber Matemática?
- Na opinião dos professores universitários muitas vezes os alunos vêm mal preparados do ensino secundário. Concorda?
- O que acha que deveria ser feito para inverter a situação?

Guião simplificado

- Profissão: **como chegou, quando decidiu? O que contou mais na decisão?**
- ***Que aspectos significativos da vida como professora? Mudou algo até hoje?***
- Formação educacional na faculdade, **que importância? E o estágio?**
- ***Que motivações, que contrapartidas profissionais? Profissionalmente realizada? Que planos profissionais tem?***
- A Matemática: **porque escolheu? O que viu (vê) na Matemática para a escolher?**
- ***Que experiência da Matemática enquanto aluno? Que lembranças, episódios, professores?***
- Relação com a Matemática, **sempre a mesma? O que mudou? Diferenças secundário-superior?**
- ***Professor de matemática pode ser visto como um matemático? E o aluno?***
- Vivência actual da matemática? **Que actividades matemáticas? Faria hoje cadeiras científicas?**
- ***O que é fazer matemática? Elementos para a actividade matemática? Exemplos de actividades matemáticas?***
- Matemática e outras ciências? **Diferenças, semelhanças.**
- ***O que é para si a matemática? Que palavras para descrever a matemática?***
- As aulas: **O que lhe dá mais gosto fazer? Quando fica satisfeito? O que lhe indica que a aula foi bem sucedida?**
- ***Que tipo de dificuldades encontra mais frequentemente nas aulas?***
- Quando tem que introduzir **um assunto novo como procede habitualmente?**
- ***Que actividades propõe habitualmente aos alunos? Livro de texto: que papel, como o utiliza?***

Anexo 4 — Episódios apresentados às professoras

(Frases de matemáticos)

Episódio 1[1]

"Se não provamos coisas não estaremos certamente a fazer Matemática."
(Snapper, E. 1988, p. 54)[2]
"Aquilo de que verdadeiramente a Matemática consiste, é de problemas e das suas soluções. Os problemas são o coração da Matemática."
(Halmos, 1980, p. 519)
"Não se pode certamente ser matemático sem fazer cálculos. Um matemático por essência e por destino não pode dispensar-se de fazer cálculos"
(Flato, 1990, p. 27)

Episódio 2

"As ciências experimentais fazem-se nos laboratórios onde os profissionais trabalham em equipa para desenvolver o seu trabalho. Para fazer Matemática são apenas necessários uma folha de papel e bons livros e o trabalho em equipa é bastante raro."
(Dieudonné, 1990a, p. 24)

Episódio 3

"É inegável que alguma da melhor inspiração em Matemática — nessas partes de Matemática tão pura quanto possamos imaginar — proveio das ciências naturais."
(Neuman, 1988, pp. 2029-30)

[1] Cada um dos episódios foi apresentado separademente numa ficha A5.

[2] A referências das citações usadas nosepisódios não constavam o texto usado nas entrevistas.

Episódio 4

"Se um problema de xadrez é, em sentido grosseiro, 'inútil', então, tal é igualmente verdade para a maior parte da melhor Matemática (...). Apenas uma pequena parte da Matemática tem utilidade prática e que essa parte é relativamente desinteressante."

(Hardy, 1988, p. 2005)

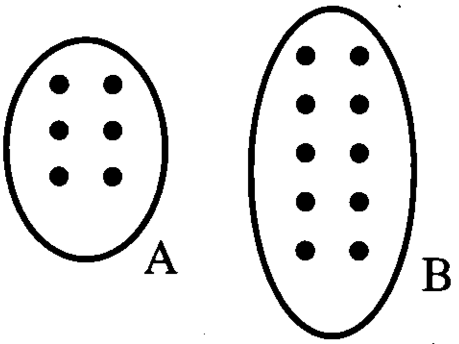
"Os modelos que o matemático cria, como os do pintor e os do poeta, devem ser belos; as ideias, como as cores ou as palavras devem ajustar-se harmoniosamente. A Beleza é o primeiro teste: não há lugar permanente no mundo para a Matemática feia."

(Hardy, 1988, p. 2003)

(Episódios de aula)

Episódio 5

Foi pedido a um aluno do 10º ano que demonstrasse que a soma de dois números pares é um número par. Para efectuar a demonstração o aluno desenhou as seguintes figuras:



O aluno disse que um número é par se for possível, a partir dele, obter emparelhamentos como os do diagrama A ou B. Disse que era indiferente o número de emparelhamentos em A ou B. Ora, colocando B por debaixo de A, continuamos a obter o mesmo de tipo de emparelhamento e, portanto, o número que lhe corresponde será também par. Este número é a soma dos números pares dados.

• Aceitava esta resposta do aluno? Considerava que o aluno demonstrou que a soma de dois números pares é um número par? Num caso e noutro, como justificava a sua posição?

Episódio 6

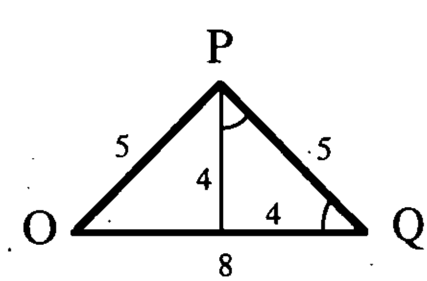
Considere a seguinte demonstração?

Se	$x=y\neq 0$
então	$x^2=xy$
	$x^2-y^2=xy-y^2$
	$(x+y)(x-y)=y(x-y)$
	$x+y=y$
	$y+y=y$
Logo	$2=1$

• Usa (acha que se deve usar) este tipo de situações? Que ganhariam os alunos?

Episódio 7

Pediu a um aluno que justificasse se um triângulo de lados 5, 5 e 8 centímetros era ou não um triângulo rectângulo. O aluno fez o seguinte desenho.



Ao lado do desenho escreveu:
Se este triângulo fosse rectângulo, então o < P teria 90° e o < marcado 45°. O outro < marcado em baixo seria também 45° e então a altura teria que ser 4. Mas isto não pode ser porque eu sei que um triângulo rectângulo teria 3, 4 e 5 de lados e este tem 4, 4 e 5.

• Como aceitaria esta resposta?

Episódio 8

A soma dos *n* primeiros números naturais pode ser apresentada sob várias formas. Qual delas prefere?

$$\frac{n}{2}(n+1) \qquad \frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$$

$$n\,\frac{(n+1)}{2} \qquad \frac{n\,(n+1)}{2}$$

$$(n+1)\,\frac{(n-1)}{2}+\frac{(n+1)}{2} \qquad \frac{1}{2}(n+1)^2-\frac{1}{2}(n+1)$$

- Usaria questões como estas com os alunos? Com que objectivos?

Episódio 9

Pediu a um aluno para resolver a seguinte equação 5x-7=3. Ele apresentou-lhe a seguinte resolução:

5x-7=3=5x-7+7=3+7=5x=10=x=2

- Como apreciaria a resposta do aluno?

Episódio 10

Um aluno reparou que

$$\frac{16}{64}=\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4}=\frac{1}{4} \qquad \frac{26}{65}=\frac{2\cancel{6}}{\cancel{6}5}=\frac{2}{5} \qquad \frac{19}{95}=\frac{1\cancel{9}}{\cancel{9}5}=\frac{1}{5}$$

e perguntou-lhe se isto acontecia sempre. O que lhe responderia?

(Frases de alunos)

Episódio11

"Para mim a Matemática é fazer contas"

Episódio 12

"A disciplina de que eu mais gosto é de Ciências. Fazemos experiências e aprendemos coisas sobre o mundo, os animais e as plantas. A (Frases de alunos)disciplina que menos gosto é de Matemática. É muito repetitiva, sempre muito igual e não percebo para que vai servir."

Episódio 13

"Eu gosto de Português e de Matemática mas por razões diferentes. De Português porque podemos fazer coisas que nós imaginamos, explorar, inventar. De Matemática porque tudo é muito claro e conciso; um problema ou está certo ou errado e, depois de resolvido, podemos passar a diante sem nos preocuparmos com o que já fizemos."

(Frases de professores)

Episódio 14

"A primeira coisa que me ocorre dizer, é que a Matemática é uma ciência , uma ciência exacta. É este, aliás, um dos aspectos que a distingue das outras ciências. Na Matemática não há erro, nas outras ciências tudo é susceptível de erro. Isto acontece porque a Matemática é essencialmente lógica, construída dedutivamente a partir de determinadas proposições."

Episódio 15

"A linguagem da Matemática, quer queiramos quer não, é uma linguagem árida; é uma linguagem que afasta, desde sempre."

Anexo 5 — Guião de observação e análise de aulas

(Ambiente de aula e interacções pessoais)

Como é o ambiente geral da aula e o ritmo de trabalho, como é o grau de atenção e envolvimento dos alunos nas tarefas, de que tipo são as interacções na aula (professor-aluno(s), aluno(s)-professor, aluno-aluno), que aspectos sobressaem da relação do professor com os alunos e da relação entre os alunos.

(Estrutura da aula)

Como começa a aula, quais os seus momentos ou fases principais e qual a sua sequência, que relações com aulas anteriores ou posteriores, como termina a aula.

(Papel do professor)

O que caracteriza fundamentalmente a actuação do professor em aula (expor/explicar, esclarecer, perguntar; dirigir, orientar, discutir; controlar, apoiar, incentivar): de que natureza são as suas intervenções, como solicita a participação dos alunos e integra as suas contribuições, como acompanha a actividade que os alunos desenvolvem, como procede na correcção dos trabalhos que são realizados, como procede para introduzir novos assuntos.

(Papel do aluno)

O que caracteriza fundamentalmente a actuação dos alunos em aula (escutar, observar, perguntar, responder, pôr dúvidas, questionar, discutir): como participam os alunos na aula, que tarefas realizam, de que tipo são as intervenções ou solicitações que dirigem ao professor, de que natureza é a colaboração e interajuda entre os alunos; em que grau que tipo de iniciativas tomam em aula.

(Actividades na aula)

O que caracteriza fundamentalmente as actividades em aula:

- ao nível da sua origem e iniciativa (do professor, dos alunos); ao nível do suporte em que são propostas (oral, escrito);

- ao nível do seu grau de estruturação (mais ou menos estruturadas);

- ao nível do estilo de trabalho (individual, grupo, colectivo);

- ao nível da sua duração (mais ou menos prolongada);

- ao nível da sua natureza (exposição, prática/consolidação[1], exploração/investigação[2], resolução de problemas[3], discussão[4]);

- ao nível do seu conteúdo (carácter problemático da actividade, contextualização, ligação com a realidade, utilização de materiais, utilização de tecnologia)

- ao nível da sua incidência principal (cálculo, demonstração, pesquisa de regularidades, resolução de problemas, matematização)

Registar: dia, hora, ano, turma, número de alunos (e sexo), condições físicas da sala, sumário.

[1] Resolução de exercícios para aquisição/treino/domínio de regras, técnicas, linguagem, terminologia, conceitos ...

[2] Explorar (observar, analisar, comparar, identificar regularidades...), formular conjecturas (levantar hipóteses), testar conjecturas (exemplos, contra-exemplos, verificação ...), demonstração (justificação, argumentação, indução, dedução, absurdo ...)

[3] Demonstrar, descobrir/determinar; formular, resolver.

[4] Ao nível do grupo, ao nível da turma; professor-aluno(s), aluno-aluno.

Anexo 6 — Categorias de análise

Foram previamente estabelecidas três categorias temáticas gerais, comuns aos matemáticos e às professoras: A Matemática, A actividade matemática e O percurso escolar e profissional, bem como duas outras, O ensino da Matemática (apenas utilizada com os matemáticos) e As aulas de Matemática (apenas usada com as professoras.

Os quadros das páginas seguintes contém estas categorias e sua especificação, bem como as categorias utilizada na análise e discussão dos casos, estabelecidas no processo em interacção com os dados recolhidos.

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="3">Categorias de análise dos casos dos matemáticos
(estabelecidas na interacção com os dados)</td></tr>
<tr><td>Manuel Silva</td><td>Manuel Nunes</td><td>Discussão</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Categorias temáticas gerais
(pré-definidas)</td><td>Percurso escolar e profissional

Relação com a Matemática
Escolha do curso

Escolha da profissão
Envolvimento profissional</td><td colspan="2">Escolha da Matemática

Preferências disciplinares
Relação com a Matemática
Escolha do curso
Ensino secundário vs Ensino superior

Escolha da profissão

Investigação-ensino
Motivações profissionais
Envolvimento profissional</td><td>Escolha da Matemática
e da profissão</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Matemática

Lógica-intuição
Dedução-indução
Carácter exacto-carácter experimental
Certeza-falibilidade
Carácter absoluto-carácter-relativo
Invenção-descoberta
Matemática e ciências
Matemática e realidade</td><td colspan="2">Matemática</td><td rowspan="4">Matemática e actividade matemática

Matemática e realidade, ciências
A verdade e o rigor e a demonstração
O papel dos problemas
Modelação matemática
O papel das tecnologias e da experiência
O trabalho dos matemáticos
Papel da comunidade matemática</td></tr>
<tr><td>Matemática e realidade
Rigor e verdade</td><td>Matemática e ciências
Modelos matemáticos
Matemática pura-aplicada
Carácter absoluto vs relativo</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Actividade Matemática

O papel da lógica e da intuição
O papel da experiência
O papel da tecnologia
O papel das interacções

O cálculo
A pesquisa de regularidades
A formulação e teste de conjecturas
A demonstração
A formulação e resolução de problemas
A matematização</td><td colspan="2">Actividade Matemática</td></tr>
<tr><td>Intuição e lógica
Resolução de problemas
Demonstração
O papel da experiência
O papel do computador
O trabalho dos matemáticos</td><td>Modelação matemática
O papel da experiência
O papel do computador
O trabalho dos matemáticos</td></tr>
</table>

		Categorias de análise dos casos dos matemáticos (estabelecidas na interacção com os dados)		
		Manuel Silva	**Manuel Nunes**	**Discussão**
Categorias temáticas gerais (pré-definidas)	**Ensino da Matemática** O professor e o ensino O professor e a Matemática O aluno e a Matemática	**Ensino superior** Preferências lectivas Aspectos problemáticos O papel do professor e do aluno **Ensino secundário** Aspectos problemáticos O aluno e a Matemática O professor e a Matemática		**Ensino da Matemática**

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2"></th><th colspan="3">Categorias de análise dos casos das professoras
(estabelecidas na interacção com os dados)</th></tr>
<tr><th>Maria da Graça</th><th>Maria José</th><th>Discussão</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Categorias temáticas gerais
(pré-definidas)</td><td>Percurso escolar e profissional

Relação com a Matemática
Escolha do curso
Formação educacional

Escolha da profissão
Envolvimento e evolução profissional</td><td colspan="2">Escolha da Matemática

Preferências disciplinares
Relação com a Matemática
Escolha do curso
Ensino secundário-Ensino superior
Formação educacional

Escolha da profissão

Motivações profissionais
Envolvimento profissional
Evolução como professora</td><td>A escolha da Matemática e da profissão

Evolução profissional</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Matemática

Lógica-intuição
Dedução-indução
Carácter exacto-carácter experimental
Certeza-falibilidade
Carácter absoluto-carácter relativo
Invenção-descoberta
Matemática e ciências
Matemática e realidade</td><td colspan="2">Matemática</td><td rowspan="4">Matemática e actividade matemática

Envolvimento matemático como professoras
O carácter distintivo da Matemática
Conceitos e cálculo
Compreensão e mecanização
Raciocinar, demonstrar, aplicar
Autonomia e iniciativa</td></tr>
<tr><td>Relação com a Matemática
Clareza e exactidão
Carácter dedutivo
Aplicabilidade</td><td>Relação com a Matemática
Carácter exacto vs experimental
Aplicabilidade</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Actividade Matemática

O papel da lógica e da intuição
O papel da experiência
O papel da tecnologia
O papel das interacções

O cálculo
A pesquisa de regularidades
A formulação e teste de conjecturas
A demonstração
A formulação e resolução de problemas
A matematização</td><td colspan="2">Actividade Matemática</td></tr>
<tr><td>Os conceitos e as regras
A compreensão
O cálculo</td><td>Compreensão vs mecanização
Demonstração
Matematização
O cálculo
Autonomia e iniciativa</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="3">Categorias de análise dos casos das professoras
(estabelecidas na interacção com os dados)</td></tr>
<tr><td>Maria da Graça</td><td>Maria José</td><td>Discussão</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Categorias temáticas gerais
(pré-definidas)</td><td rowspan="3">As aulas de Matemática*

Ambiente
Interacções
Estrutura
Actividades em aula
Papel do professor
Papel do aluno

* Para maior detalhe, ver guião de observação de aulas</td><td colspan="2">As aulas de Matemática

As turmas
Estrutura e sequência
Ambiente e interacções</td><td rowspan="3">A Matemática nas aulas

Ambiente de aula e interacções
A abordagem didáctica</td></tr>
<tr><td colspan="2">A Matemática nas aulas</td></tr>
<tr><td>Começando pelo mais simples
Ilustrando
O cálculo e os conceitos
Dificuldades dos alunos</td><td>Do exemplo à regra
A importância do raciocínio
Autonomia e iniciativa
Compreensão e mecanização
Dificuldades dos alunos</td></tr>
</table>

Anexo 7 — Calendário da recolha do material empírico

Matemáticos: Março de 1993 a Janeiro de 1994

Março	Maio	Novembro	Janeiro
M. Silva 1ª entrevista	**M. Nunes** 1ª entrevista	**M. Silva** 2ª entrevista	**M. Nunes** 2ª entrevista

Professoras: Fevereiro a Maio de 1994

	Fevereiro	Março	Abril	Maio
Semana 1	—	**M. da Graça** 1ª observ. aulas **M. José** 1ª entrevista	—	—
Semana 2	—	**M. José** 1ª observ. aulas	—	**M. José** 2ª observ. aulas
Semana 3	—	**M. da Graça** 2ª entrevista **M. José** 2ª entrevista	—	—
Semana 4	**M. da Graça** 1ª entrevista	—	**M. da Graça** 2ª observ. aulas	—

Anexo 8 — Transcrição de uma entrevista. 1º página

(fac-símile, redução a 70%)

Projecto [redacted]
Data da gravação:_24_/_Fevereiro_/_1994
Intervenientes: Henrique Guimarães
[redacted]

Tempo da gravação:±2 horas
Transcrição realizada por: [redacted]
Data da finalização:08-04-94

Escola Secundária [redacted]

H.G.— ...e a primeira questão que eu gostava de pôr era tu podias contar um bocadinho como é como é que ~~seria a tua ci (???)~~ ... professora.

[redacted] —Eu, por acaso, não ..., quer dizer, eu quando ... Quando é que eu decidi? Eu decidi ir para Matemática porque era uma coisa que eu gostava muito a nível de con..., de ... de unificado sempre gostei. Tive a dada altura o... uma ajuda de uma prima que era de Físico-Quimicas e que... e que me deu assim uma ... uma boa ajuda e fez-me ver isto de outra maneira, e eu passei a gostar muito! E depois fui pra, pó sé ... Sexto e Sétimo ano porque gostava daquilo e escolhi logo uma alínea que tivesse Matemática. Porque eu estava muito indecisa entre Matemática, e entre Física e entre as engenharias. Pronto, "tava" muito indecisa entre estas três. E depois, porque ... eu tinha assim um certo receio de ir enfrentar uma Faculdade sozinha! (e riu-se). E eu, ... na turma onde eu estava, no ... eu andei no Maria Amália. Na turma onde eu estava, três colegas ... duas colegas iam "pa" Matemática. Sabiam mesmo que queriam vir "pa" Matemática! E então eu pensei assim: entre eu ir sozinha "pa" uma coisa ... e ...e ir acompanhada, prefiro ir acompanhada! E então, decidi ir com elas. Pronto, foi um bocado assim! Que eu fui "pa" Matemática, porque podia ter ido ... porque eu "tava" muito ligada ou a Matemática ou a Física ó ... ó a engenharia porque eram as três que eu achava que aplicava a Matemática, e que eu gostava daquilo. Foi essa a decisão porque é que eu fui "pa" Matemática. Depois, eu fui para o ramo educacional! porque ... o científico ..., quer dizer, quando cheguei ao curso, eu achei aquilo ... muito diferente daquilo que eu estava à espera! Era muito teórico, muito teórico! E eu sou uma pessoa muito prática!

gostava

indecisa (v.p.4)

(v.p.22)

1

Anexo 9 — Folha de recolha de dados de observação, 1ª página

(fac-símile, redução a 70%)

Aula 2 - 4ª
14.05.04 13.30 sala D10

A2 - 4ª

· A ...
· Pf. na sala

22 alunos
quase todos aos pares
3 alunos

· Entra na aula. começar. Funções: continuação do estudo da função quadrática. Que falta
· Entram 1 aluno
· A p.f. verifica q. há aulas e quem faltas.

Turma em silêncio

· "Vamos lá começar. Vamos usar 2 representações 2 f. quadráticas (Eu sei q há TPC):

13.45 1º tópico

dos gráficos, um com pedir a localização do vértice

Escreve

$f: x \rightarrow 0,4(x-2)^2+5$

$g: (x) \rightarrow x^2-5x+6$

A Pf. sugere a 2 alunos da fila esq. q ... do tempo para ver melhor

· Pede aos alunos q 2 a 2 façam localização o vértice e expliquem gráfica/ as 2 funções

A prof. na sala

"Comecem pela 1ª e depois façam a 2ª

'Temporalmente c/ o q foi feito c/ os outros indo ver o q acontece c/ estes

Os alunos parecem concentrados. A prof. circula. Atende pedidos dos alunos

Tom silencioso calmo

Anexo 10 — Registo de uma aula, 1ª página
(fac-símile, redução a 70%)

[redacted]
[redacted]
[redacted]
[redacted]
(V. fls/13 A1)

[redacted]
[redacted]
[redacted]
[redacted]
(V4 fls 15 A2)

1ª Aula

Dia 16, 12.15 h

Sala A22

Sumário: "Operações com condições"

Estrutura e sequência da aula

A aula teve duas fases distintas. Na primeira, que ocupou a maior parte do tempo da aula, os alunos trabalharam sobre o primeiro de um exercícios de u ficha de trabalho que a professora distribuiu logo no início. Na segunda, procedeu à correcção no quadro desses exercícios. Nesta segunda fase, depois do momento que os resultados obtidos foram apresentados no quadro, a professa procurou relacionar as operações com condições que os alunos efectuaram com as correspondentes operações com conjuntos.

Os trabalhos iniciaram-se com a professora a distribuir a ficha (o sumário foi referido logo a seguir, de passagem) e quando tocou para a saída a professora deixou resgistada no quadro uma questão em suspenso para a aula seguinte.

Desenvolvimento

1. Todos os alunos entraram logo após a professora, sentaram-se e dispuseram-se a iniciar os trabalhos. Há uma referência ligeira à minha presença da parte da professora, dizendo que já tinha falado da minha assistência nesta e nas próximas aulas. [redacted] dizendo que, para resolver, são os exercícios da ficha e que o mapa era para ajudar.

2. [redacted] olham as folhas com alguma curiosidade, enquanto a professora termina a distribuição, anunciando no fim a proposta de trabalho: "Hoje é só para resolver o primeiro, para ajudar a introduzir a nova matéria que é operações com condições que é o que podem escrever no sumário".

3

Anexo 11 — Fichas de trabalho (Maria José)

(fac-símile, redução a 70%)

Escola Secundária de 93/94

Métodos Quantitativos

Considera o Universo $U = \{1,2,3,4,5,6\}$ e as condições :

$a(x) : x < 4$

$b(x) : x \geq 2$

$c(x) : x > 5$

$d(x) : x > 6$

$e(x) : x > 0$

Determina o conjunto solução das seguintes condições :

a) $b(x) \wedge a(x)$

b) $b(x) \vee a(x)$

c) $\sim a(x)$

d) $b(x) \wedge \sim a(x)$

e) $\sim (b(x) \vee a(x))$

f) $\sim b(x) \wedge \sim a(x)$

g) $\sim d(x)$

h) $\sim c(x)$

i) $d(x) \wedge a(x)$

j) $d(x) \vee a(x)$

K) $e(x) \vee b(x)$

l) $e(x) \wedge b(x)$

m) $a(x) \vee \sim a(x)$

T.P.C.

Dados os conjuntos :

$A = \{ x \in R : x > -2\}$, $B =]-5 , 4]$. Determina :

a) $A \cap B$

b) $A \setminus B$

c) $A \cup B$

d) $A \cap B$

Escola Secundária de ... 10 º Ano ...

Métodos Quantitativos

Assunto : Operações com condições.

Considera o conjunto : { Alemanha, França, Grécia, Irlanda, Itália , Portugal }

Consultando o mapa e atendendo ao Universo dado tenta responder às questões :

1. a) x tem fronteira com Portugal.
   b) x tem fronteira com a Suíça.
   c) x é banhado pelo Oceano Atlântico.
   d) x tem fronteira com a Suíça e x é banhado pelo Oceano Atlântico.
   e) x tem fronteira com a suíça ou x é banhado pelo Oceano Atlântico.
   f) x não tem fronteira com a Suíça.
   g) x tem fronteira com a Suíça mas não é banhado pelo Oceano Atlântico.

2. Duas condições dizem-se incompatíveis quando a intersecção dos seus conjuntos solução for $\varnothing$. Diz de entre as condições seguintes as que são incompatíveis :
   a) $x > 1$ b) $x < -2$ c) $2 < x < 4$ d) $x \leq 1$

3. Das condições anteriores encontra duas condições contrárias.
4. Considera o conjunto : $M = \{ 1, 2, 4, 5 \}$ e as condições :

$$a(x) : x^2 + 1 < 8$$
$$b(x) : x > 1$$
$$c(x) : x - 2 = 4$$

Indica o conjunto solução das condições :

a) $b(x)$
b) $a(x) \vee c(x)$
c) $\sim(a(x) \vee c(x))$
d) $\sim a(x) \wedge \sim c(x)$
e) $b(x) \wedge (a(x) \vee c(x))$

5. sendo $A=\{ x \in R : |x| < 2 \}$ e $B = \{ x \in R : x \geq -5 \}$
Calcula :

a) A b) B c) $\bar{A} \cup B$ d) $\overline{A \cup B}$ e) $B \setminus A$

Escola Secundária de · · · 93/94

Métodos Quantitativos - 10º Ano

Operações com Condições /Conjuntos

a(x), b(x),c(x) representam condições possíveis num determinado Universo
i(x) representa uma condição impossível
u(x) uma condição universal

Condições	Conjunto solução
a(x)	A
b(x)	B
c(x)	C
i(x)	$\varnothing$
u(x)	U

Operações com condições	Operações com Conjuntos solução
$a(x) \wedge b(x)$	$A \cap B$
$a(x) \vee b(x)$	$A \cup B$
$a(x) \wedge (b(x) \vee c(x))$	$A \cap (B \cup C)$
$\sim a(x)$	CA ou A
$a(x) \wedge \sim b(x)$	$A \cap CB$ ou $A \cap B$ ou $A \setminus B$

Algumas Propriedades importantes :

$a(x) \wedge \sim a(x)$ é uma condição impossível	- $A \cap A = \varnothing$
$a(x) \vee \sim a(x)$ é uma condição Universal	- $A \cup A = U$
$\sim (a(x) \wedge b(x)) = \sim a(x) \vee \sim b(x)$	- $A \cap B = A \cup B$
$a(x) \wedge i(x) = i(x)$	- $A \cap \varnothing = \varnothing$
$a(x) \wedge u(x) = a(x)$	- $A \cap U = A$
$a(x) \vee i(x) = a(x)$	- $A \cup \varnothing = A$
$a(x) \vee u(x) = U(x)$	- $A \cup U = U$

Este trabalho foi escrito com o processador de texto Word 5.1 mas paginado e terminado com a versão do Office 98 do mesmo processador. O corpo principal do texto foi impresso em caracteres Times 14. Foram feitos 23 exemplares policopiados e brochados que ficaram prontos em Julho de 2003.